FONDO PIZZOFALCONE

29-F-3

18452
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

NAZIONALE
B. Prov.
I
2278
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. Prov.
I
2278

608489

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

ET SPHÉRIQUE,

ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE.

PAR S. F. LACROIX.

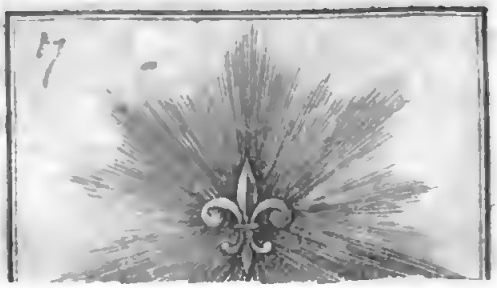
TROISIÈME ÉDITION,

revue et augmentée.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n°. 71.

AN XII = 1803.



Le Cours de Mathématiques pures, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations, est composé ainsi qu'il suit :

I. Traité élémentaire d'Arithmétique.

II. Elémens d'Algèbre.

III. Elémens de Géométrie, précédés de réflexions sur l'ordre à suivre dans ces Elémens, sur la manière de les écrire, et sur la méthode en Mathématiques.

IV. Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie.

V. Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

Il y a en outre :

Le complément des Elémens d'Algèbre.

Le complément des Elémens de Géométrie.

PRÉFACE.

J'ai déjà eu occasion d'indiquer dans une des notes du discours préliminaire de mon *Traité Elémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, une partie des vues qui m'ont dirigé dans la rédaction de l'ouvrage dont je donne en ce moment la troisième édition; mais je les exposerai ici dans leur entier, parce que je ne crois pas que ces discussions soient étrangères au progrès de la science, sur-tout lorsqu'elles sont fondées sur l'expérience de l'enseignement. Ce n'est pas assez d'exposer les méthodes que l'on croit les plus convenables, il faut encore faire connoître les considérations qui les rendent préférables aux autres; et ces développemens, qui ne peuvent s'adresser qu'aux personnes déjà familiarisées avec le sujet, aux professeurs mêmes, ne formant dans le corps de l'ouvrage que des digressions obscures pour la plupart des élèves, et pouvant même rebuter leur attention, sont mieux placés sans doute dans la préface qu'ailleurs.

Commençons d'abord par ce qui regarde l'étendue donnée aux matières; j'aurai peu de choses à dire à cet égard pour les deux trigonométries. Dans la trigonométrie recti-

ligne le but d'un auteur d'élémens est sans doute rempli dès qu'il a, d'une manière spéciale, fait concevoir au lecteur la nature et la formation des tables trigonométriques, et qu'il l'a mis en état de les appliquer à la résolution des triangles dans tous les cas qui peuvent se présenter. A cela j'ai ajouté la recherche des premières relations des lignes trigonométriques, et ce que j'en ai dit suffit pour parvenir aux principaux résultats qu'on emploie, soit dans le calcul différentiel et intégral, soit dans la méchanique.

Je n'ai pas donné les expressions des sinus et des cosinus, en séries ordonnées par rapport aux puissances de l'arc, quoique les moyens ne m'ayent assurément pas manqué pour le faire d'une manière élémentaire (*). Dans une matière aussi épuisée, on n'a que l'embarras du choix; mais j'ai eu tant d'occasions de me convaincre de la nécessité d'éviter les doubles emplois, que j'ai cru devoir renvoyer au calcul différentiel une recherche qui n'avoit point d'utilité présente, puisqu'il ne s'agissoit pas de faire réellement calculer

(*) J'aurois pu sans doute employer, tel qu'il est, ou modifier, le procédé dont je me suis servi dans l'introduction du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (1er. volume), qui est à-la-fois, simple, direct et rigoureux.

des tables de sinus aux élèves, mais seulement de leur montrer la possibilité d'en construire.

Je nai pas dû non plus exposer la partie de l'usage de ces tables, qui tient à leur disposition particulière, parce que cet objet est toujours rempli par les auteurs des tables eux-mêmes, dans les discours qu'ils mettent à la tête de ces livres.

La trigonométrie sphérique n'est guères appliquée qu'à l'astronomie et à la navigation, et les divers auteurs qui ont traité de ces deux sciences, ont toujours eu soin d'exposer, conformément aux connoissances préliminaires qu'ils ont supposées à leurs lecteurs, les notions de trigonométrie et les formules dont ils avoient besoin.

Un livre destiné à l'enseignement général des mathématiques, devoit au contraire renfermer une théorie à-la-fois simple et générale, qui se liât avec les parties précédentes; or, le traité de trigonométrie sphérique que j'ai donné d'après Euler, réunit à ces avantages, une brièveté et une élégance remarquables: on y trouve même un grand nombre de formules qu'on chercheroit vainement dans des traités plus volumineux. Quant aux applications, je n'en ai présenté qu'une seule, parce que les autres auroient exigé

quelques notions des mathématiques appliquées et étrangères à mon sujet.

Vient ensuite l'application de l'algèbre à la géométrie ; cette branche, due entièrement aux modernes, et dont la découverte leur a bientôt donné une immense supériorité sur les anciens, devait nécessairement changer de forme à mesure qu'elle s'étendoit et se perfectionnoit.

On en voit les premières traces dans les écrits de Viète ; car on ne doit pas regarder comme appartenant à cette application, la manière dont les algébristes du quinzième siècle ont résolu les équations du deuxième degré ; c'étoit au contraire une application de la géométrie à l'algèbre, ou, pour parler plus exactement, à l'arithmétique ; de-là vient que la plupart des termes relatifs à cette théorie sont tirés de la géométrie.

Jusqu'à Descartes, l'algèbre n'étoit employée que comme un moyen subsidiaire pour faciliter la combinaison des *théorémes* de géométrie, dans la résolution des questions déterminées ; mais ce philosophe, en le rendant propre à représenter la nature des lignes et des surfaces quelconques, en augmenta considérablement le domaine, et en fit la véritable méthode d'invention en géométrie et en méchanique.

Comme tous les inventeurs, il ne put

connoître jusqu'où s'étendoit la puissance du moyen qu'il avoit introduit dans la science; et ne pensant qu'à l'appliquer aux questions dont s'occupoient le plus les géomètres comtemporains, il ne s'attacha guères aux courbes que pour construire par leurs intersections les racines des équations déterminées, ou pour leur mener des tangentes. Que les anciens, qui étaient forcés par la nature de leurs méthodes, à ne considérer qu'un petit nombre de courbes des plus simples, se soient attachés à en détailler les propriétés, comme s'ils avaient cherché à les épuiser, rien de plus naturel; ce travail fut aussi celui des géomètres prédécesseurs de Descartes, de ce philosophe même et de quelques-uns de ses disciples, pour qui les courbes formoient un spectacle nouveau. Mais Newton sentit que l'idée de considérer les courbes par leurs équations, avoit donné une telle étendue au sujet, qu'il étoit impossible d'en parcourir les détails même les plus curieux; et il le prouva bien dans l'énumération qu'il fit des diverses espèces de lignes courbes que pouvait représenter l'équation à deux indéterminées du troisième degré, et dont il fit monter le nombre à 73.

Au commencement du 18e siècle, quelques géomètres de l'académie des sciences,

à l'exemple de Newton, entreprirent aussi d'analyser les courbes contenues dans l'équation générale à deux indéterminées. Les espèces se multiplièrent à tel point, qu'ils n'osèrent ou ne purent en donner le détail, et ils se bornèrent à des genres dont le nombre fut encore assez considérable.

Persuadés qu'il falloit renoncer à faire une revue générale des courbes, les géomètres sentirent que cette partie auroit atteint toute la perfection dont elle étoit susceptible, si elle fournissoit des méthodes pour déterminer par l'équation d'une courbe, ses principales propriétés, et les diverses circonstances de son cours; et c'est-là ce qu'ont fait Euler et Cramer, et ce que le calcul différentiel facilite beaucoup.

Il sembloit donc naturel de revenir sur ses pas, et de rattacher à un même fil toute la théorie des lignes droites ou courbes, classées naturellement par leurs équations: c'est cependant ce qu'on ne fit point. La force de l'habitude engagea encore les géomètres à amalgamer, pour ainsi dire, les méthodes anciennes avec les nouvelles; et cet assemblage informe portoit toujours l'empreinte des premiers temps de la science. On n'employa la considération des équations qu'à partir des lignes du second ordre; on surchargea la théorie de ces lignes d'un grand

nombre de propositions détachées, obtenues ou démontrées par des voies incohérentes, et qui ne laissoient pas entrevoir comment on devoit s'y prendre dans les cas imprévus.

Cependant Descartes, Huyghens, Newton avoient créé la méchanique des solides et des fluides qui n'existoit pas pour les anciens. Les mathématiques, qui, passé l'arithmétique et la géométrie élémentaire, n'offroient que des théories purement spéculatives, étoient devenues les bases de la physique, de l'astronomie et de la navigation. Le besoin d'en pousser l'étude plus loin qu'on n'avoit fait jusques-là, et d'y joindre les plus importantes de leurs applications, prouvoit la nécessité de faire dans les écrits des géomètres un triage des propositions, pour ne donner dans les élémens que celles qui pouvoient servir aux applications, ou qui étoient indispensables pour développer les méthodes, et de laisser celles qui n'étoient que curieuses dans les auteurs originaux, qu'on peut regarder comme les archives de la science.

Il faut convenir cependant que cette opération n'a pu s'effectuer complètement que de nos jours, parce que la prédilection que Newton avoit pour la synthèse, et qui tenoit plus encore à l'esprit du temps qu'au goût particulier de ce grand homme (*Géom. Discours préliminaire*), a retardé beaucoup la

véritable application de l'algèbre à la mécha-nique. Les principales circonstances du mouvement des corps, n'ont été déduites pendant long-temps que des propriétés particulières des courbes. C'est Euler qui chercha le premier à les tirer entièrement du calcul. Ses successeurs ont étendu et perfectionné ses travaux, au point de ne rien laisser à désirer ; car les difficultés qui restent à surmonter, sont de nature à ne pouvoir pas être attaquées par des considérations géométriques.

Cet historique, en montrant les vues qui ont pu guider, dans le siècle précédent, les auteurs des traités d'application de l'algèbre à la géométrie, dans le choix et l'étendue des matières, fait voir aussi, qu'il n'y a pas de raison pour les imiter, et qu'on doit au contraire prendre une marche opposée à celle qu'ils ont suivi, puisqu'on doit tendre à un but très-différent. Tout ce qu'ils ont regardé comme essentiel à leurs ouvrages, devenant inutile pour la lecture de ceux auxquels les nôtres servent d'introduction, doit être remplacé par des notions qui soient analogues à celles qu'on donne des parties supérieures : sur-tout abrégeons ; car la multitude des richesses que les sciences physiques ont accumulées, les contacts multipliés qu'elles ont les unes avec les

autres, ne permettent point à ceux qui ne veulent pas se consacrer entièrement aux mathématiques pures, d'employer à des spéculations curieuses si l'on veut, mais sans aucune application pour le moment, un temps dont ils retireroient plus de fruit par l'étude des autres sciences.

On peut déduire facilement de ce qui précède, la réponse à cette question : *Que doit comprendre un traité d'application de l'algèbre à la géométrie, lorsqu'on le destine à des élèves qui doivent se livrer aux sciences physico-mathématiques, aux jeunes gens qui étudient pour entrer à l'école Polytechnique, par exemple?*

Il est visible qu'il faut y insérer tout ce qui est nécessaire pour entendre les ouvrages les plus récens et les plus complets, qui traitent des sciences physico-mathématiques, ou les leçons qui se donnent à l'école Polytechnique.

Si dans ces livres ou dans ces leçons on ne considère les lignes que par leurs propriétés générales, on ne cite que quelques-unes de leurs propriétés particulières les plus remarquables, si toutes les questions de méchanique y ont ramenées, par le calcul, aux équations les plus simples, aux formules les plus immédiates, qu'est-il besoin de se perdre dans une multitude de propositions,

dans une variété de méthodes qui ne font qu'éblouir les commençans, et leur faire passer sur le même résultat, présenté de plusieurs manières, un temps qu'ils employeroient a en apprendre de nouveaux.

Qu'un auteur, engagé dans des recherches qui l'amusent, remarque en passant des procédés élégans, des propriétés nouvelles, de semblables matériaux peuvent être consignés utilement dans un livre destiné à ceux qui cultivent spécialement la branche des mathématiques dont il s'est occupé; et encore, si on compulsoit avec soin, le très-grand nombre de traités des sections coniques, matière sur laquelle on a peut être autant écrit que sur toute autre, on y retrouveroit beaucoup de ces choses oubliées qui deviennent ensuite des nouveautés. Mais tout ce qui n'augmente pas la puissance des méthodes, ou qui n'abrège pas la chaîne qui lie les résultats entr'eux, ne doit pas entrer dans les élémens.

C'est après avoir médité long-temps ces idées que j'ai cru pouvoir m'en tenir à ce que contient le *Traité élémentaire d'application de l'Algèbre à la Géométrie.*

Montrer le double point de vue sous lequel on peut envisager l'application de l'algèbre à la géométrie; d'abord ainsi qu'elle s'est présentée aux premiers inventeurs, comme un

moyen de combiner les théorêmes de géométrie ; ensuite devenue par l'heureuse idée de Descartes, et les travaux d'Euler, de Lagrange, de Monge, le moyen général de déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes :

Faire sentir par des exemples, les avantages et les inconvéniens de ces deux manières de résoudre les questions, et comment le choix des données et des inconnues influe sur la simplicité des solutions :

Classer en conséquence les lignes par leurs équations, faire remarquer que ces équations n'ont pas une forme unique, mais qu'elles se compliquent plus ou moins, suivant les relations que les lignes qu'elles représentent peuvent avoir avec celles auxquelles on les rapporte ; en déduire la nécessité de savoir transformer les coordonnées, et employer cette transformation à la classification des lignes, par la simplification de leur équation :

Revenir par un chemin opposé, en remontant de quelques propriétés des lignes à leur équation, pour montrer que les diverses équations des lignes ne sont que les énoncés de leurs diverses propriétés qui se contiennent les unes les autres dès qu'elles sont caractéristiques :

Déduire des équations générales des

courbes de second degré, leurs propriétés communes, et s'en servir pour donner une idée de la manière dont les anciens les avoient considérées, afin de lier les connoissances anciennes avec les nouvelles :

Déterminer les tangentes des courbes du second degré par une méthode qui soit analytique, uniforme pour les trois courbes, et qui s'étende même à toutes les courbes ; faire remarquer les limites des tangentes de l'hyperbole, ou ses asymptotes ; indiquer sommairement la manière dont les anciens menoient les tangentes aux sections coniques :

Passer aux principes de la détermination des courbes par le nombre de points qui les caractérise :

Enfin, exquisser rapidement l'usage des courbes pour construire les racines des équations déterminées, et pour peindre les circonstances de leur résolution :

Voilà ce que j'ai jugé devoir entrer dans mon ouvrage.

En se reportant à l'époque de la première édition, on trouvera sans doute que ce plan étoit neuf ; les moyens que j'ai employés pour le remplir l'étoient aussi, du moins à l'égard des élémens ; et cette nouveauté a pu donner aux principes que j'ai exposés un air de difficulté qu'ils n'ont point par eux-mêmes.

Au reste, je puis croire qu'on m'a accordé dans plusieurs ouvrages, à la vérité sans me nommer, les honneurs du commentaire; mais s'il en falloit réellement un pour se familiariser avec le mien, j'indiquerois le *Recueil de diverses propositions de Géom. etc.*, par le cit. Puissant. Cet habile professeur qui réunit l'honnêteté aux talens les plus distingués, a rempli son ouvrage de problèmes élégamment résolus, et qui peuvent être très-utiles aux élèves qui veulent s'exercer.

Quant à la méthode que j'ai suivie, elle peut paroître alternativement analytique et synthétique; et ceux qui auront lu le discours préliminaire des Élémens de Géométrie n'en seront pas surpris, car ils penseront peut-être, ainsi que moi, que la réunion de ces deux méthodes est nécessaire pour compléter une doctrine quelconque; mais la seconde doit être subordonnée à la première, si l'on veut mettre en évidence la liaison des propositions, et indiquer, dans toutes les circonstances essentielles, l'origine des notions qu'on expose, le but auquel on tend.

Lorsqu'il s'agit, par exemple, de montrer l'identité des courbes contenues dans l'équation du second degré, avec celles que les anciens ont considérées dans le cône, il est évident que c'est la méthode synthétique qu'il faut employer pour mieux indiquer la route

que suivoient les anciens dans ces recherches. Mais on voit aussi qu'il ne convient pas aujourd'hui de considérer d'abord le cône pour amener les courbes du second degré ; car pourquoi commencer par cette surface plutôt que par toute autre ? Et quand même on employeroit son équation, on ne feroit encore que de l'algèbre et non pas de l'analyse.

On pourroit peut-être regarder comme formant un double emploi, les deux méthodes par lesquelles j'analyse successivement l'équation générale du second dégré à deux indéterminées, puisque j'aurois pu commencer immédiatement par la transformation des coordonnés ; mais je ferai observer que la première dont s'est servi d'abord Descartes dans le Livre 2 de sa Géométrie, et Herman dans le tome IV des mémoires de Pétersbourg, étant très-propre à montrer comment on discute une courbe quelconque par son équation, devoit par cette raison ne pas être omise.

La publication du *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral* m'ayant fait sentir la nécessité de détacher du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, en 3 vol. in-4°., quelques notions élémentaires sur les surfaces courbes, et les courbes à double courbure, je les ai placées ici par forme d'appendice.

TABLE

TABLE.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

On cousidère six choses dans un triangle rectiligne ; trois angles et trois côtés. Avec trois de ces six choses, on détermine toujours un triangle, pourvu qu'il s'y trouve un côté, page 1

Si on avoit une suite de triangles calculés sur tous les angles possibles, il se trouveroit nécessairement dans cette suite un triangle équiangle avec un triangle quelconque donné, 2

Le *sinus* est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité ; le *cosinus* est la partie du rayon comprise entre le pied du sinus et le centre ; le *sinus verse* est la partie du rayon comprise entre l'arc et le pied du sinus ; la *tangente* est la perpendiculaire élevée à l'extrémité d'un arc, et terminée au rayon prolongé qui passe par l'autre extrémité ; ce rayon prolongé s'appelle *sécante*, 4 et 5

On appelle *complément* d'un arc ou d'un angle ce qu'il faut ajouter ou retrancher à cet arc ou à cet angle pour en faire le quart de la circonférence ou un angle droit, 4

Les *cosinus*, *cotangentes* et *cosécantes* sont les sinus, tangentes et sécantes des arcs complémentaires, 4 et 5

Le cosinus et le rayon ont le même rapport que le sinus et la tangente, ou que le rayon et la sécante, 6

Le rayon est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente, ou entre la sécante et le cosinus, *ibid.*

Le quarré du rayon est égal à la somme des quarrés du sinus et du cosinus, 7

Le sinus de la somme ou de la différence de deux arcs, est égal au sinus du premier multiplié par le cosinus du second plus ou moins le sinus du second par le cosinus du premier, le tout divisé par le rayon, *ibid.*
Le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs, est égal au produit des cosinus de chacun de ces arcs moins ou plus le produit des sinus, le tout divisé par le rayon, *ibid.*
De ces expressions on déduit le sinus d'un arc multiple d'un autre, 9
Étant donné le sinus d'un arc, on trouve le sinus de sa moitié, 10
On appelle *supplément* d'un arc ou d'un angle ce qu'il faut y ajouter ou en retrancher pour faire la demi-circonférence ou deux angles droits, 12
Le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double, *ibid.*
De la division du cercle et de la construction des tables de sinus et de cosinus, *ibid.*
Le sinus de la moitié du quart de cercle est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 14
La longueur d'un arc est plus grande que celle de son sinus, et moindre que celle de sa tangente, 15
Un angle obtus a le même sinus que son supplément, 20
Les sinus et les cosinus changent de signe lorsqu'ils passent dans le demi-cercle opposé à celui où ils se trouvoient d'abord, 21
Les tangentes et les sécantes prennent leur signe conformément à leur relation avec les sinus et cosinus, 24
Recherches de diverses relations des fonctions trigonométriques. *ibid.*
Le rapport de la somme à la différence des sinus de deux arcs est le même que celui des tangentes de la demi-somme et de la demi-différence de ces mêmes arcs, 28
Table des formules trigonométriques les plus usitées, 30
Dans tout triangle rectangle, le rayon est au sinus

d'un des angles aigus comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle, 32
Le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé, *ibid.*
Comment on calcule un côté quelconque triangle rectangle quand on connoît les deux autres, 33
Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés, 35
Rapport entre les côtés d'un triangle et les sinus de ses angles, 37
Par la proportion énoncée plus haut, on résout tous les cas d'un triangle quelconque, excepté celui dans lequel on ne connoît que deux côtés et l'angle compris, et celui dans lequel on ne connoît que les trois côtés, *ibid.*
La somme de deux côtés d'un triangle est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence, 39
Comment on trouve immédiatement le troisième côté, 40
Le sinus de la moitié d'un angle est égal à la racine quarrée du produit des différences de la demi-somme des trois côtés du triangle avec chacun des côtés qui comprennent l'angle cherché, divisé par le produit de ces deux côtés, le rayon étant pris pour unité, 42
Exemples de résolution de triangles rectangles et obliquangles, 43
Application des principes de la trigonométrie à la détermination de points situés dans l'espace, 46

CHAPITRE II.

De la Trigonométrie sphérique.

Un triangle sphérique est celui que forment sur la surface de la sphère trois grands cercles qui se coupent deux à deux, 50

Construction sur laquelle repose toute la trigonométrie sphérique, page 51
Équations qui renferment implicitement toutes les relations qu'ont entre elles les six parties d'un triangle sphérique, 53
Préparation de ces équations pour les appliquer immédiatement à la résolution des triangles sphériques, *ib.*
Ce qu'est le triangle *supplémentaire*, 56
Simplification des formules pour le cas où le triangle est rectangle, 60
Transformation de ces équations en d'autres pour y appliquer commodément le calcul des logarithmes, 62
Formules qui renferment toutes les combinaisons des angles et des côtés d'un triangle sphérique, 66
Formules de *Neper*, 68
Récapitulation des formules nécessaires pour résoudre un triangle sphérique, 69
Observation sur les diverses conditions qui doivent se trouver remplies pour qu'un triangle sphérique puisse avoir lieu, 70
Application de la trigonométrie sphérique à un problême, 72

CHAPITRE III.

De l'Application de l'Algèbre à la Géométrie.

Idée générale de l'application de l'algèbre à la géométrie, 73
Comment l'algèbre sert pour combiner des théorêmes de géométrie, pour mettre en équation et pour résoudre les problêmes relatifs à l'étendue, *ibid.*
L'aire d'un triangle est exprimée par la racine quarrée du produit de la demi-somme des trois côtés, multipliée par les différences entre cette demi-somme et chacun des côtés, 77
Questions du premier et du second degré, dans les-

quelles les lignes ne sont pas évaluées en nombre, mais sont considérées en elles-mêmes, page 77
Ce que c'est que la construction des expressions algébriques, 80
Comment on effectue celle des quantités *homogènes* qui se rapportent à des lignes, ou du premier degré, 81
Construction des racines quarrées, 83
Ce qu'il faut faire quand la quantité n'est pas homogène, 85
Construction des racines des équations du second degré à une seule inconnue, 86
Résolution graphique de ces équations, 87
De la signification des signes + et — par rapport aux lignes, et de leur usage dans la résolution des questions, 89
Toutes les fois qu'il s'agit de distances rapportées à un point fixe, et comptées sur une même ligne ou sur des lignes parallèles, celles qui sont affectées du signe —, doivent se prendre dans un sens opposé à celles qui sont affectées du signe +. 92
Analyse complète du problême où il s'agit de mener par un point pris dans un angle droit, une ligne dont la partie interceptée entre les côtés de cet angle, soit de grandeur donnée, 94
Résolution de ce problême par Newton, pour le cas où le point par lequel doit passer la ligne de grandeur donnée est à égale distance des côtés de l'angle droit, 100
Construction des expressions algébriques qui appartiennent à des aires ou à des volumes, 102
Idée fondamentale de l'analyse de Descartes, par laquelle on représente les courbes au moyen des équations à deux indéterminées, 105
Équation d'une ligne droite, 106
—— d'un cercle, 107
Ce que c'est que les *coordonnées*, leurs *axes*, leur *origine*, 109

Comment on distingue par leurs signes les quatre angles que forment leurs axes, page 110
Ce que c'est que le *lieu* d'une équation, et comment s'obtient celle d'une courbe quelconque, 111
L'équation générale du premier degré à deux indéterminées, appartient à une ligne droite, 112
Il faut deux conditions pour déterminer cette ligne, 114
Équation d'une droite qui passe par deux points donnés, *ibid.*
Expression de la distance de ces deux points, 115
Équation d'une droite qui, passant par un point donné, seroit parallèle à une droite donnée, 116
Équation de la perpendiculaire abaissée sur une ligne donnée, par un point donné, *ibid.*
Pour trouver le point de rencontre de deux droites qui se coupent, il faut supposer que les coordonnées de l'une sont les mêmes que celles de l'autre, 117
Expression de la longueur d'une perpendiculaire abaissée sur une droite donnée par un point donné, *ibid.*
Expressions du sinus, du cosinus et de la tangente de l'angle que deux droites font entre elles, 118
Équation générale du cercle, que l'on obtient en plaçant l'origine des coordonnées d'une manière quelconque, 120
Comment on détermine celui qui passe par trois points donnés, 121
Équation du cercle, les plus simples, 122
Problêmes qui se rapportent à des lignes droites, 123
Équations qui donnent la relation qui existe entre les angles et les côtés d'un triangle, 128
Expression de la surface d'un triangle au moyen des coordonnées des sommets de ses angles, 130
La surface d'un triangle ne dépendant nullement de sa position par rapport aux axes des coordonnées, on trouve en effet une autre expression qui ne dépend que des côtés, 131

Équation qui fait connaître la relation entre les diverses parties d'un quadrilatère et ses diagonales, page 132
Expression du rayon du cercle circonscrit à un triangle, *ibid.*
Expression du rayon du cercle inscrit à un triangle, 133
Si dans l'intérieur d'un triangle équilatéral on abaisse une perpendiculaire sur chacun des côtés de ce triangle, la somme de ces trois lignes sera égale à la hauteur, 136
En combinant les équations de la droite et du cercle, on détermine les propriétés résultantes de la rencontre de ces lignes, *ibid.*
Application de l'équation qui résulte de cette combinaison à la recherche de plusieurs théorêmes de géométrie, 138
Détermination analytique des tangentes menées au cercle par un point extérieur, et par un point de sa circonférence, 140
Comment on trouve la position que doit avoir une ligne menée par un point donné, pour que sa partie comprise dans un cercle donné soit aussi donnée, 142
Équation générale des courbes du second degré, 144
Leurs *diamètres*, 146
Simplification de l'équation quand on la rapporte à ces lignes, *ibid.*
Examen des valeurs que peut prendre l'expression générale des ordonnées dans le cas où la quantité *m* est positive, 147
Détermination du *centre*, 149
Équation rapportée à ce point, *ibid.*
Construction et forme de la courbe relative à ce cas, 150
Elle se réduit à un point avant de devenir imaginaire, 151
Examen du cas où *m* est négative, 152
La courbe a encore un centre, *ibid.*
Construction et forme de la courbe, 153
Quand la courbe se réduit à deux droites qui sont en général *ses asymptotes*, 154

Examen du cas où $m = 0$, page 156
Forme et construction de la courbe, 157
L'équation générale du second degré à deux indéterminées fournit trois courbes seulement : la première se nomme ellipse, la seconde hyperbole, et la troisième parabole, *ibid.*
Des *diamètres conjugués*, 159
Transformation des coordonnées d'une courbe, 160
Application de cette transformation à l'équation générale du second degré pour la ramener aux axes des courbes qu'elle représente, 165
Équations de l'ellipse et de l'hyperbole par rapport à leurs axes, en comptant les abscisses du centre, 167
Axe transverse, et *second axe* de l'hyperbole, 168
Caractères propres à chacune des trois courbes, rapportés à l'équation générale du second degré, 170
Transformation particulière pour obtenir la parabole, qui n'a pas de centre, 171
Équation à trois termes dans laquelle la parabole se trouve aussi comprise et rapportée à son axe, 173
Trouver l'équation d'une courbe telle que si l'on mène de chacun de ses points à deux points fixes, ou *foyers* des droites, la somme de ces lignes soit constamment égale à une ligne donnée, 174
Cette courbe est l'ellipse ; ses constructions par points, et moyen mécanique pour la décrire par un mouvement continu, 176
Équation polaire de l'ellipse, 178
Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la différence des lignes menées aux foyers est égale à une ligne donnée, 179
Cette courbe est l'hyperbole ; ce que c'est que l'*hyperbole équilatère* ; construction de l'hyperbole par points, et moyen mécanique pour la décrire, 181
Son équation polaire, 182
Trouver l'équation d'une courbe telle que chacun de ses points soit autant éloigné d'une droite donnée de

de position que d'un point fixe ou foyer aussi donné de position, page 182
Cette courbe est la parabole, sa construction par points et par un mouvement continu, 183
Son équation polaire, 184
Probleme général qui conduit successivement à chacune des courbes du second degré, rapportées à leur *directrice*, *ibid.*
Équations des courbes du second degré, rapportées au *paramètre*, 186
Dans l'ellipse et l'hyperbole, le *paramètre* est une troisième proportionnelle aux deux axes, et il est aussi la double ordonnée menée par le foyer, 188
Dans l'ellipse et l'hyperbole, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes, et dans la parabole comme les abscisses correspondantes, 189
Application de la transformation des coordonnées à la recherche des diamètres conjugués, 190
Un diamètre quelconque étant donné, trouver la position de son conjugué, 194
La somme des quarrés des demi-diamètres conjugués dans l'ellipse, ou leur différence dans l'hyperbole, est égale à la somme des quarrés des demi-axes, ou à leur différence, 199
Les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse ou inscrits entre les deux parties opposées de l'hyperbole, sont tous égaux au rectangle des axes, 201
Équations qui font trouver les demi-axes lorsqu'on connoît les demi-diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, *ibid.*
Démonstration de l'identité des courbes du second degré avec les sections faites dans un cône par un plan, ce qu'est la section *anti-parallèle*, 202
Détermination des lignes droites qui coupent ou qui touchent les courbes du second degré, 207

Trigonométrie.

Expression de la tangente de l'angle que doit faire avec l'axe des abscisses une droite pour toucher une courbe du second degré, page 209
Expressions de la *soutangente* dans chacune des courbes du second degré, 210
Dans la parabole, la soutangente est double de l'abscisse, 211
Construction de la tangente à l'ellipse, 212
Expressions des normales et sounormales pour toutes les courbes, 213
Expressions des soutangentes, tangentes, sounormales et normales, particulières aux courbes du second degré, *ibid.*
Détermination synthétique des tangentes aux courbes du second degré, 214
Chaque branche de l'hyperbole demeure toujours renfermée entre les côtés d'un certain angle sans jamais pouvoir les atteindre, 216
Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, 217
Ce que c'est que la *puissance* de l'hyperbole, 219
Si on mène une droite quelconque par un point de l'hyperbole, les parties de cette droite, interceptées entre chaque branche de la courbe et son asymptote, sont égales entre elles, 220
Construction de l'hyperbole, par points, lorsqu'on en a les asymptotes et un point, 221
Des hyperboles *conjuguées*, *ibid.*
Du nombre de points qu'il faut pour déterminer d'espèce, de grandeur et de position une courbe du second degré, *ibid.*
De la construction des équations des degrés supérieurs, par les courbes, 223
Application au quatrième degré, *ibid.*
Problême de la duplication du cube, 226
—— De la trisection de l'angle, 227
Méthode générale pour construire les équations d'un degré quelconque, et qui représente les divers prin-

cipes sur lesquels repose la résolution numérique des équations, page 228

APPENDICE

Contenant les premiers principes de l'application de l'algèbre, aux surfaces courbes et aux courbes à double courbure.

Équations du plan et de la ligne droite. 233

Des coordonnées d'un point de l'espace, *ibid.*
Équation générale du plan, 236
Désignation des huit angles trièdres formés par les plans coordonnés, au moyen des signes + et —, 238
Équation de la ligne droite, *ibid.*
Équation du plan qui passe par trois points donnés, 240
Comment on reconnoît que deux droites sont dans un même plan. 241
Équation du plan parallèle à un plan donné et qui passe par un point donné, et celles des droites parallèles dans l'espace, 242
Équations d'une droite et d'un plan, respectivement perpendiculaires, 243
Expression de la distance de deux points de l'espace et équation de la sphère, 244
Détermination de l'angle que font deux lignes dans l'espace, 245
—— De celui que font deux plans, 246

Des surfaces du second degré. 247

Équation générale de ces surfaces, 248
Elles ont des *plans diamètres*, *ibid.*
Équations de leurs sections par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, 249
Équations particulières du cône droit, 250

Comment une équation contenant seulement deux des coordonnées, appartient dans l'espace à une *surface cylindrique*, page 253

Des courbes considérées de l'espace. 254

Équation du cercle donné par l'intersection d'une sphère et d'un plan, 255

Comment une courbe est représentée par les équations de ses projections, *ibid.*

Des courbes à *double courbure* et de celle qui résulte de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre droit, 256

Comment on peut reconnoître si une courbe donnée dans l'espace par les équations de ses projections est plane ou non ; et si elle est à double courbure, comment on détermine le nombre des points dans lesquels elle rencontre un plan, 257

ADDITIONS, 259

Fin de la Table.

TRAITÉ

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

ET SPHÉRIQUE,

ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE

À LA GEOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

1. Dans un triangle rectiligne, il y a six choses à considérer, savoir : trois angles et trois côtés; mais il suffit de connoître un certain nombre de ces diverses parties pour déterminer les autres. Il suit en effet des propositions démontrées, relativement aux triangles égaux, que l'on peut toujours construire un triangle lorsqu'on connoît trois des six choses qui le constituent, et que, parmi les choses connues, il se trouve au moins un côté. Pour ne rien laisser à desirer sur la théorie des triangles, il faut pouvoir appliquer le calcul aux constructions géométriques, parce que l'exactitude de ces dernières est limitée par l'imperfection des instrumens,

tandis que rien n'arrête le calcul, qu'on est toujours maître de pousser jusqu'à tel degré de précision qu'on veut. Tel est l'objet qu'on se propose dans la *Trigonométrie rectiligne*.

Ceux qui ont entrepris les premiers de développer, par une suite d'opérations numériques, ou par des formules algébriques, les relations qu'ont entre elles les différentes parties d'un triangle, ont dû se trouver arrêtés par la difficulté de faire entrer dans le calcul la grandeur des angles, qui, mesurés par des arcs de cercle, ne peuvent être comparés avec les lignes droites. Mais ils ont bientôt reconnu que s'ils pouvoient, par un moyen quelconque, calculer une suite de triangles dont les angles eussent toutes les valeurs possibles, cette suite en renfermeroit nécessairement un qui seroit semblable au triangle que l'on auroit à déterminer, quel qu'il fût ; et qu'alors de simples proportions suffiroient pour déduire les parties du second de celles du premier. L'exemple suivant éclaircira ce que ces notions peuvent avoir d'abstrait.

FIG. 1. 2. Supposons que, dans le triangle ABC, *fig.* 1re, on connoisse l'angle B, l'angle C et le côté BC, on cherchera dans la suite des triangles calculés, celui qui a deux angles b et c respectivement égaux aux angles B et C; il sera nécessairement semblable au triangle proposé ABC; et puisque toutes ses parties ab, ac, bc, sont connues, on aura les proportions

$$bc : ab :: BC : AB, \qquad bc : ac :: BC : AC,$$

dans chacune desquelles les trois premiers termes sont donnés. On trouvera par conséquent

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc}, \qquad AC = \frac{BC \times ac}{bc};$$

et comme on a d'ailleurs $A = a$, toutes les parties du triangle ABC seront déterminées.

3. Maintenant qu'on voit le parti qu'on peut tirer d'une suite de triangles faits sur tous les angles possibles, et dont les côtés seroient calculés, il est naturel de chercher les moyens de former une pareille suite. Pour considérer d'abord le cas le plus simple, supposons que les triangles qu'on se propose de déterminer soient rectangles; il est facile de voir qu'on les pourra construire tous dans un quart de cercle, en abaissant de chacun des points de l'arc AB, *fig.* 2, des perpendiculaires MP, $M'P'$, FIG. 2. $M''P''$, &c. sur le rayon AC, et tirant les rayons MC, $M'C$, $M''C$, &c. les triangles MPC, $M'P'C$, $M''P''C$, &c. formés ainsi, seront rectangles en P, P', P'', &c. et les angles MCP, $M'CP'$, $M''CP''$, &c. auront successivement toutes les valeurs possibles: enfin les angles CMP, $CM'P'$, $CM''P''$, &c. qui, avec les précédens, forment un angle droit, seront aussi tels que l'exige la nature des triangles rectangles, et il ne sauroit exister de triangle rectangle qui ne soit pas équiangle avec quelqu'un de ceux que fournit la construction présente. Il est à propos de remarquer que ces derniers ont tous une même hypoténuse, égale au rayon de l'arc AB.

4. On pourroit encore former une suite de triangles rectangles, ayant tous un des côtés de l'angle droit égal au rayon du cercle; il suffit pour cela d'élever la tangente indéfinie AT à l'extrémité du rayon AC, et de mener par le centre C et par les points M, M', M'', &c. les sécantes CN, CN', CN'', &c. Il est évident que les triangles CAN, CAN', CAN'', &c. auront successivement toutes les combinaisons d'angles qui peuvent exister dans un triangle rectangle; et parmi ces triangles, il s'en trouvera nécessairement un semblable à tel triangle rectangle qu'on voudra.

5. Dans les triangles CPM, $CP'M'$, $CP''M''$, &c. dont l'hypoténuse ne change pas, les côtés PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. qui croissent en même temps que les angles ACM, ACM', ACM'', &c. et que les arcs AM, AM', AM', &c. qui mesurent ces angles, ont reçu un nom à cause de cette dépendance; la ligne PM s'appelle le *sinus* de l'arc AM; la ligne PM' est de même le sinus de l'arc AM', et ainsi des autres. Il suit de-là que *le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de cet arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité.* Les lignes CP, CP', CP'', &c. qui diminuent lorsque les arcs AM, AM', AM'', &c. augmentent, sont respectivement égales, comme parallèles comprises entre parallèles, aux perpendiculaires MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, &c. abaissées des points M, M', M'', sur le rayon CB, perpendiculaire au rayon CA; et il est évident que les lignes MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, sont, par rapport aux arcs BM, BM', BM'', ce que sont PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. par rapport aux arcs AM, AM', AM'', &c. et que par conséquent MQ est le sinus de BM, $M'Q'$ celui de BM', $M''Q''$ celui de BM'', &c.

Deux arcs qui, pris ensemble ou soustraits l'un de l'autre, valent le quart de la circonférence, sont dits *complémens* l'un de l'autre. Les arcs BM, BM', BM'', sont respectivement les complémens de AM, AM', AM'', &c. On a désigné les lignes MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, &c. ainsi que leurs égales CP, CP', CP'', sous le nom de *cosinus* des arcs AM, AM', AM'', &c. D'après ces notions, *le cosinus d'un arc quelconque est le sinus du complément de cet arc, et est égal à la partie du rayon comprise entre le centre et le pied du sinus.*

Les triangles rectangles CPM, $CP'M'$, $CP''M''$, &c. qui ont tous une même hypoténuse, sont donc formés

par le rayon du cercle, et par le sinus et le cosinus de celui de leurs angles aigus qui a son sommet au centre (*).

6. Passons aux triangles CAN, CAN', CAN'', &c. Leurs hypoténuses sont les *sécantes* des arcs AM, AM', AM'', &c. parce qu'*on nomme sécante d'un arc le rayon mené par une des extrémités de cet arc, et prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente menée par l'autre extrémité.* Les portions AN, AN', AN'', &c. prises sur la tangente AT, sont les tangentes des arcs AM, AM', AM'', &c. parce que l'on est convenu d'appeler *tangente d'un arc la partie qu'interceptent, sur la tangente menée par l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent* (**).

7. Si, par l'extrémité B de l'arc AB, *fig.* 3, on mène la tangente Bn prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la sécante CN, la ligne Cn est la sécante de l'arc BM, complément de AM, et se nomme la *cosécante* de AM; la ligne Bn, tangente de BM, est la *cotangente* de AM; parce qu'on appelle *cotangente et cosécante d'un arc, la tangente et la sécante de son complément.* La cotangente et la cosécante, comme on voit, ne font pas partie des mêmes triangles que la tangente et la sécante, ainsi que cela arrive pour le sinus et le cosinus.

(*) La partie AP du rayon AC, comprise entre le pied du sinus et l'extrémité de l'arc, se nomme *sinus verse.* Cette ligne d'ailleurs n'est d'aucun usage en trigonométrie.

(**) On voit ici les mots *sécante* et *tangente*, pris dans une acception différente de celle qu'on leur donne dans les Elémens de géométrie. Dans cette partie des mathématiques, la sécante et la tangente sont des droites indéfinies, dont l'une coupe le cercle, et l'autre le touche; mais en trigonométrie, les mêmes dénominations s'appliquent toujours à des lignes d'une grandeur déterminée: quand il peut y avoir équivoque, on appelle ces dernières *tangentes et sécantes trigonométriques.*

8. Les tangentes et les sécantes ont avec les sinus et les cosinus des relations très-simples, au moyen desquelles on peut trouver les unes lorsqu'on connoît les autres. Les triangles CPM et CAN étant semblables, donnent $CP : PM :: CA : AN$, d'où l'on tire $AN = \frac{PM \times CA}{CP}$; mettant, au lieu des lignes CP, PM et AN, leur désignation, savoir : cos AM, sin AM et tang AM, et représentant le rayon CA par R, on aura $\text{tang } AM = \frac{R \sin AM}{\cos AM}$.

Des mêmes triangles CPM et CAN, on déduit aussi $CP : CM :: CA : CN$, ce qui conduit à $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$: mais $CN = \text{séc } AM$, $CM = CA = R$, $CP = \cos AM$; donc $\text{séc } AM = \frac{R^2}{\cos AM}$.

9. Si l'on compare entre eux les triangles CAN et CBn, qui sont encore semblables, puisqu'ils sont tous les deux rectangles, et que l'angle $ACN = CnB$, comme alternes internes par rapport à la sécante Cn, on aura la proportion

$$AN : CA :: CB \text{ ou } CA : Bn,$$

qui donne

$Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}$, ce qui revient à $\cot AM = \frac{R^2}{\text{tang } AM}$.

Cette proportion et celle que nous venons de trouver pour la sécante, nous apprennent que *le rayon est moyen proportionnel entre la sécante et le cosinus, entre la tangente et la cotangente*, puisqu'on a

$\cos AM \times \text{séc } AM = R^2$, $\text{tang } AM \times \cot AM = R^2$.

10. Aidés de ce qui précède, il ne nous manque plus, pour être en état de construire les tables nécessaires à la

trigonométrie, que de connoître les moyens de calculer les sinus et les cosinus seulement. Le cosinus même se déduit immédiatement du sinus; car le triangle rectangle CPM, qui les contient l'un et l'autre, et qui a pour hypoténuse le rayon, donne

$$\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 \text{ ou } (\sin AM)^2 + (\cos AM)^2 = R^2,$$

c'est-à-dire, que *le quarré du rayon est égal à la somme des quarrés du sinus et du cosinus*, d'où il suit :

$$\cos AM = \sqrt{R^2 - (\sin AM)^2}.$$

La proposition suivante, qui donne l'expression du sinus et du cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs, mérite la plus grande attention, parce qu'elle renferme implicitement toutes les propriétés des sinus et des cosinus.

11. *Soient deux arcs quelconques* a *et* b; *on aura*

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a . \cos b \pm \sin b . \cos a}{R},$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\cos a . \cos b \mp \sin a . \sin b}{R}.$$

Pour le prouver, je prends sur le cercle AMB, *fig.* 4, FIG. 4. l'arc $AM = a$; je porte de chaque côté du point M les arcs MN et MN', égaux à b; je tire la corde NN'; des points N, M, N', j'abaisse sur le rayon AC, les perpendiculaires NQ, MP, $N'Q'$; par le point M, je mène le rayon MC, et du point E, où il rencontre la corde NN', j'abaisse sur AC la perpendiculaire EF; par les points E et N', je mène les droites ED, $N'G$, parallèles à AC.

Cela fait, je remarque, 1°. que NQ est le sinus de l'arc $AN = AM + MN = a + b$, et que CQ est le cosinus du même arc; 2°. que $N'Q'$ est le sinus de l'arc $AN' - MN' = a - b$, et que CQ' en est le cosinus. Mais la corde NN' étant nécessairement partagée en deux parties

égales au point E, puisque le rayon CM passe par le milieu de l'arc NN', d'après la construction, il suit de la similitude évidente des triangles $NED, NN'G$, que NG est aussi divisée en deux parties égales au point D, et que $DN=DG$. De plus, $DQ=EF$, $GQ=N'Q'$, $DE=FQ$, à cause des parallèles ; et comme DE est la moitié de $N'G$, FQ sera la moitié de $Q'Q$; en sorte que $Q'F=QF=DE$. Enfin

$$\begin{aligned} NQ &= DQ+DN=EF+DN,\\ N'Q' &= GQ=DQ-DG=EF-DN,\\ CQ &= CF-FQ=CF-DE,\\ CQ' &= CF+FQ'=CF+DE; \end{aligned}$$

mettant pour NQ, $N'Q'$, CQ, CQ' leurs désignations respectives, savoir :

$\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, j'aurai

$$\sin(a+b)=EF+DN,\quad \cos(a+b)=CF-DE,$$
$$\sin(a-b)=EF-DN,\quad \cos(a-b)=CF+DE.$$

Il ne reste plus qu'à calculer les quatre lignes EF, CF, DN et DE; les deux premières s'obtiennent par les triangles semblables CMP et CEF, dont on tire

$$CM:PM::CE:EF,\qquad CM:CP::CE:CF.$$

Or, puisque $AM=a$, j'ai $MP=\sin a$, $CP=\cos a$; il suit aussi des définitions du sinus et du cosinus (5) que EN est le sinus de l'arc MN, que CE en est le cosinus, et que par conséquent $NE=\sin b$, $CE=\cos b$, d'ailleurs, $CM=R$: substituant ces valeurs dans les proportions ci-dessus, je trouve

$$EF=\frac{MP\times CE}{CM}=\frac{\sin a\cos b}{R},$$
$$CF=\frac{CP\times CE}{CM}=\frac{\cos a\cos b}{R}.$$

Je compare ensuite les triangles CMP, DEN, qui sont semblables, parce que les côtés du second sont perpendiculaires à ceux du premier, et je déduis de ces triangles

$$CM : EN :: CP : DN, \qquad CM : EN :: MP : DE.$$

Substituant aux trois premiers termes de chacune de ces proportions, leur désignation rapportée ci-dessus, elles donnent

$$DN = \frac{EN \times CP}{CM} = \frac{\sin b \cos a}{R},$$

$$DE = \frac{MP \times EN}{CM} = \frac{\sin a \sin b}{R}.$$

Réunissant ces valeurs aux précédentes pour former celles de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$, il vient les quatre équations

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}, \\ \sin(a-b) = \dfrac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}, \\ \cos(a-b) = \dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}, \end{cases}$$

qui se réduisent aux deux qui composent l'énoncé de la proposition.

Avec ces équations, on peut trouver le sinus et le cosinus d'un arc double, triple, et en général multiple de celui dont on connoît le sinus et le cosinus. En effet, si l'on prend successivement $b = a$, $b = 2a$, on aura

$$\begin{cases} \sin 2a = \dfrac{2 \sin a \cos a}{R}, \\ \cos 2a = \dfrac{\cos a^2 - \sin a^2}{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3a = \dfrac{\sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a}{R}, \\ \cos 3a = \dfrac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{R}, \end{cases}$$

et on tirera des deux dernières équations $\sin 3a$ et $\cos 3a$, lorsque $\sin 2a$ et $\cos 2a$ seront calculés.

12. L'équation $\sin 2a = \dfrac{2 \sin a \cos a}{R}$, conduit aussi du sinus d'un arc a, à l'expression du sinus de sa moitié. Si l'on remplace $\cos a$ par sa valeur $\sqrt{R^2 - \sin a^2}$ (*), elle devient alors

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \sqrt{R^2 - \sin a^2}}{R},$$

et en élevant au quarré, on trouve

$$R^2 \sin 2a^2 = 4 R^2 \sin a^2 - 4 \sin a^4;$$

prenant $\sin a$ pour l'inconnue, dans cette équation qui peut se résoudre à la manière de celles du second degré, il vient

$$\sin a = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 \pm \tfrac{1}{2} R \sqrt{R^2 - \sin 2a^2}}.$$

Si l'on fait $2a = a'$, on aura $a = \frac{1}{2} a'$, et par conséquent

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 \pm \tfrac{1}{2} R \sqrt{R^2 - \sin a'^2}},$$

ou $$\sin \tfrac{1}{2} a' = \pm \sqrt{2 R^2 \pm 2 R \cos a'^2},$$

en mettant $\cos a'^2$ au lieu de $R^2 - \sin a'^2$ (10), en multipliant les quantités sous le radical par 4, et en divisant au-dehors par 2, ce qui ne change rien à l'expression. Telle est la formule qui donne le sinus de la moitié d'un arc, lorsqu'on a celui de cet arc.

(*) Le lecteur est prévenu que dorénavant nous désignerons le quarré du sinus de l'arc a par $\sin a^2$, expression qu'il ne faut pas prendre pour le sinus du quarré de l'arc a, ainsi $\sin a^2 = (\sin a)^2$.

13. On peut arriver à ce résultat par une construction très-simple.

Si l'on divise l'arc AM, *fig.* 5, en deux parties égales, FIG. 5. la corde AQM se trouvera également divisée en deux parties égales, et QM sera le sinus de MN ou de la moitié de AM; le triangle AMP, rectangle en P, donnera

$$AM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2};$$

et comme $AP = AC - CP = R - \cos AM = R - \cos a'$, que d'ailleurs $PM = \sin AM = \sin a'$ on aura

$$AM = \sqrt{\sin a'^2 + R^2 - 2R\cos a' + \cos a'^2} = \sqrt{2R^2 - 2R\cos a'},$$

à cause que $\sin a'^2 + \cos a'^2 = R^2$ (10), et on en déduira

$$QM = \tfrac{1}{2} AQM = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}.$$

On ne trouve de cette manière que la deuxième valeur de $\sin \frac{1}{2} a'$, l'autre est MQ'; car l'arc $MN'A'$, qui compose, avec l'arc AM, la demi-circonférence, a aussi pour sinus PM, puisque cette ligne est bien en effet la perpendiculaire abaissée de l'extrémité M sur le rayon CA' qui passe par l'extrémité (5), et rien dans l'équation d'où l'on est parti, ne faisant connoître lequel de ces deux arcs on se propose de diviser, on doit trouver en même temps le sinus de la moitié du premier et celui de la moitié du second. Suivant notre construction, on auroit

$$\begin{aligned} A'M &= \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{\overline{PM}^2 + (A'C + CP)^2} \\ &= \sqrt{\sin a'^2 + (R + \cos a')^2} \\ &= \sqrt{\sin a'^2 + R^2 + 2R\cos a' + \cos a'^2} \\ &= \sqrt{2R^2 + 2R\cos a'}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$MQ' = \sin \tfrac{1}{2} a' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R\cos a'},$$

résultat qui est la première valeur de $\sin \frac{1}{2} a'$. Il faut bien observer que, quoique $\sin a'$ soit le même dans les deux valeurs de $\sin \frac{1}{2} a'$, l'arc a' est différent : pour l'une d'elles,

cet arc est AM, et pour l'autre, $A'M$, qui est le supplément de AM; car *on entend par le supplément d'un angle ou d'un arc, ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc pour en faire deux droits, ou la demi-circonférence.* On conclura aussi de ce qui précède, que le sinus du supplément d'un arc est le même que celui de cet arc. Nous donnerons plus loin des notions générales sur les différens arcs qui peuvent avoir un même sinus, une même tangente, &c.

14. Il suit de ce qui précède, que le sinus d'un arc quelconque AN est la moitié de la corde AM de l'arc double ANM, et que la corde AM est le double du sinus de l'arc AN, moitié de ANM; de manière que lorsque les sinus sont connus, on en déduit les cordes, *et vice versâ.*

15. Nous sommes en état d'expliquer maintenant comment on a pu dresser une table des sinus et des cosinus. On a conçu premièrement le quart de cercle partagé en un certain nombre de parties égales que l'on a nommées *degrés.* On divisoit autrefois la circonférence entière en 360 degrés; on subdivisoit ensuite chacun de ces degrés en 60 parties appelées *minutes;* chacune de ces minutes en 60 parties appelées *secondes;* chacune de ces secondes en 60 parties appelées *tierces*, &c. La marque des degrés est le caractère ° placé à la droite du nombre et au-dessus, celle des minutes ′, celle des secondes ″, celle des tierces ‴, &c. en sorte que 42° 31′ 14″ 5‴ signifie 42 degrés 31 minutes 14 secondes 5 tierces.

Il est facile de voir que dans la mesure des angles on n'a aucun égard à la valeur absolue des arcs, mais seulement à leur rapport avec la circonférence entière. Il sembleroit fort naturel de la prendre pour l'unité, et

d'exprimer les arcs par des fractions, soit quelconques, soit décimales. Cependant quelques considérations particulières ont déterminé les savans chargés de la réforme des poids et mesures, à prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et par conséquent le quart de cercle ou *quadrans* pour l'unité des arcs. Ils l'ont divisé en cent parties égales qu'ils ont nommées *grades*, et qu'ils ont substituées aux anciens degrés, chacun de ces grades en cent parties égales. Ces dernières divisions remplacent les minutes, et peuvent être subdivisées autant qu'on le voudra, suivant la progression décimale.

En employant dans le cours de cet ouvrage la nouvelle division du cercle, nous exprimerons les arcs par des nombres décimaux écrits à l'ordinaire; mais nous placerons au-dessus du chiffre des unités, et à droite, la lettre ^{g}, pour désigner que l'unité est le quart de cercle, et pour empêcher qu'on ne confonde les mesures d'arcs avec les autres nombres. $0^{g},435$, par exemple, représentera l'arc égal à $\frac{435}{1000}$ ou $\frac{4350}{10000}$ du quadrans, et sera par conséquent composé de 43 grades et 50 minutes (*).

Ce n'est pas non plus les valeurs absolues des sinus que l'on a besoin de calculer, mais seulement leur rapport avec le rayon, puisqu'il suffit de connoître dans tous les triangles *CPM*, *CP'M*, &c. *fig.* 2, les rapports qu'ont entre eux les côtés (2). On peut donc, pour plus de FIG. 2.

(*) Il paroît que les principales raisons qui ont fait choisir l'angle droit pour unité, sont, 1°. que le cercle entier, à proprement parler, ne mesure point un angle, puisqu'alors le rayon mobile *CM* (*fig.* 2) FIG. 2. est revenu s'appliquer sur le rayon *CA*; 2°. que le sinus auquel on rapporte toutes les autres lignes trigonométriques, prend dans l'étendue du quart de cercle ou de l'angle droit, toutes les valeurs dont il est susceptible.

simplicité, prendre le rayon pour unité, et partager ensuite cette unité en autant de parties qu'on voudra, en 100000, par exemple, ainsi qu'on a coutume de le faire, et déterminer ensuite combien chaque sinus PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. contient de ces parties.

16. Le rayon du cercle sur lequel on se propose de construire les tables étant 1, et sa circonférence étant
FIG. 6. désignée par π, le sinus de AB, *fig.* 6, ou $\sin\frac{1}{4}\pi = 1$; on a d'ailleurs $\cos\frac{1}{4}\pi = 0$: faisant donc $a' = \frac{1}{4}\pi$ la formule $\sin\frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$ (13) fait voir que le sinus de la moitié du quart de cercle ou de $\frac{1}{8}\pi$ est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

On peut aussi s'en convaincre *à priori*, puisque le triangle CMP est alors isocèle, et que l'on a par conséquent

$$2\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 = 1,$$

d'où

$$\overline{PM}^2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad PM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

L'arc $AB = \frac{1}{2}\pi$ étant pris pour unité, AM sera de $0^q,5$: on aura donc

$$\sin 0^q,5 = \cos 0^q,50 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186.$$

Maintenant si on fait $0^q,5 = a'$, on trouvera

$$\sin\tfrac{1}{2}a' = \sin 0^q,25 = 0,382683432365$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a' = \cos 0^q,25 = 0,923879532511.$$

En partant de ces dernières valeurs, on arrivera par les mêmes formules, aux valeurs de

$$\sin\frac{0^q,25}{2} = \sin 0^q,125, \qquad \cos\frac{0^q,25}{2} = \cos 0^q,125;$$

de celles-ci à celles de

$$\sin\frac{0^q,125}{2} \sin 0^q,0625, \quad \cos\frac{0^q,125}{2} = \cos 0^q,0625;$$

de celles-ci à celles de

$$\sin\frac{0^q,0625}{2} = \sin 0^q,03125, \quad \cos\frac{0^q0625}{2} = \cos 0^q,3125;$$

et en continuant ainsi de partager chaque arc en deux

parties égales, on parviendra à un très-petit arc. A la quatorzième division, on tombe sur un arc qui n'est que $\frac{1}{16384}$ du quart de cercle; la petitesse de cet arc est telle, que dans les douze premières décimales il ne diffère pas de son sinus.

17. Pour s'en convaincre il faut observer que la longueur d'un arc est toujours moindre que celle de sa tangente, et plus grande que celle de son sinus. En effet, si on prend au-dessous du rayon AC, fig. 7, l'arc $AM' = AM$, que l'on tire la corde MM', et que l'on mène les tangentes MT, $M'T$, il est facile de voir que les tangentes doivent rencontrer toutes deux le rayon AC dans un même point, puisque les triangles CMT et $CM'T$, sont égaux. Les lignes MT et $M'T$ étant égales aussi bien que les lignes PM et PM', et les arcs AM et AM', on aura $2AM < 2MT$ et $2AM > 2PM$, parce que la longueur d'un arc de cercle est comprise entre celles des portions correspondantes des polygones inscrit et circonscrit (*), (*Géom.* 150), $AM < MT$, $AM > PM$. FIG. 7.

Je ferai remarquer, à cette occasion que le rapport entre la tangente et le sinus d'un arc tend sans cesse vers l'unité à mesure que l'arc diminue. En effet, de $\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}$, on

(*) La proposition rappelée ci-dessus est un cas particulier de cette autre : *Les lignes qui sont par-tout convexes dans le même sens, sont d'autant plus longues qu'elles s'écartent davantage de la ligne droite.* En effet, si l'on mène à la ligne courbe ACB, fig. 8, intérieure à la courbe AMB, une tangente DE, cette tangente sera plus courte que l'arc DME, et on aura $ADEB < AMB$. Tirant ensuite par les points H et L, intermédiaires entre A et C, C et B, les tangentes FG, IK, on formera une nouvelle ligne brisée $AFGIKB$, qui sera moindre que la première, puisque $FG < FD + DG$, $IK < IE + EK$. Il est évident qu'on construira FIG. 8.

tire $\frac{\sin a}{\text{tang } a} = \cos a$; et comme cos a approche sans cesse de l'unité, il s'ensuit que la tangente et le sinus approchent aussi de plus en plus de l'égalité, parce que la *limite* (*Alg.* 200) de leur rapport est l'unité.

18. Il suit évidemment de-là que si la valeur de la tangente et celle du sinus d'un petit arc AM, ne diffèrent point dans un certain nombre de leurs premiers chiffres, ces mêmes premiers chiffres donneront aussi une valeur approchée de l'arc. En prenant, par exemple, $PM = 0{,}0001$, on trouve

$$CP = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2} = 0{,}999\,999\,995,$$

et $$MT = \frac{CM \times PM}{CP} = 0{,}000\,100\,000\,000\,5,$$

valeur qui ne diffère de PM qu'au treizième chiffre. Ayant donc trouvé que le sinus de $\frac{1}{16134}$ du quart de cercle, est 0,000 873 799, on en conclura que ce sinus ne diffère point de l'arc dans les douze premiers chiffres, et que par conséquent le nombre rapporté ci-dessus exprime aussi la valeur approchée de l'arc proposé (*).

---

de la même manière une suite indéfinie de lignes brisées qui iront sans cesse en diminuant à mesure qu'elles approcheront de se confondre avec la courbe ACB, qui sera donc non-seulement plus petite que AMB, mais encore que toutes les lignes brisées dont on vient de parler.

(*) La même chose se prouve en réduisant en série l'expression de la tangente. En effet, on a $\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin a^2}}$ (8, 10); mais $\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin a^2}} = \sin a\,(1 - \sin a^2)^{-\frac{1}{2}}$ développant la dernière quantité par la formule du binome, on trouvera

$$\text{tang } a = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin a^3 + \tfrac{1}{8}\sin a^5 + \&c.$$

Il est évident que tant que sin a sera une petite fraction décimale, le terme $\frac{1}{8}\sin a^5$ ne pourra influer que sur les derniers chiffres de

19. On voit que tant que les arcs sont assez petits pour se confondre avec leurs sinus et leurs tangentes, ces dernières lignes leur sont proportionnelles, et que par conséquent on a

$$\sin\frac{1^q}{16384} \sin\frac{1^q}{100000} :: \frac{1^q}{16384} : \frac{1^q}{100000}$$

$$\text{ou} :: 100000 : 16384.$$

On aura donc

$$\sin 0^q,00001 = \frac{16384 \sin\frac{1^q}{16384}}{100000} = 0,000\,015\,707\,963,$$

au moins dans les douze premières décimales. On trouvera par la même raison

$$\sin 0,00002 = 2 \sin 0,00001$$
$$\sin 0,00003 = 3 \sin 0,00001$$
$$\sin 0,00004 = 4 \sin 0,00001$$
$$\text{etc.}$$

Ayant soin de calculer en même temps le cosinus et la tangente de chacun de ces arcs, on verra qu'on peut suivre cette voie jusqu'à l'arc dont le sinus et la tangente se confondent encore dans les douze premières décimales.

Si l'on ne vouloit avoir les valeurs approchées que jusqu'à la huitième décimale, on pourroit pousser ainsi jusqu'à l'arc de 0,001.

Pour s'élever ensuite à des arcs plus grands, on se servira des équations

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

---

l'expression de l'arc a, et que dans les premiers on aura arc $a = \sin a$.

En faisant $\sin a = 0,0001$, on trouve $\frac{1}{2}\sin a^3 = 0\,000\,000\,000\,000\,5$, résultat qui ne peut changer que le treizième chiffre.

faisant successivement $a = 0^q,001$, $a = 0^q,002$, etc. dans les deux premières, on en déduira

$$\sin 0^q,002,\ \sin 0^q,004$$
$$\cos 0^q,002,\ \cos 0^q,004$$
etc.

et prenant ensuite $a = 0^q,001$, $b = 0^q,002$, $a = 0^q,002$, $b = 0^q,003$, etc. on obtiendra par le moyen des deux dernières,

$$\sin 0^q,003,\ \sin 0^q,005$$
$$\cos 0^q,003,\ \cos 0^q,005$$
etc.

Cet exposé suffit pour faire concevoir comment on a pu former les tables trigonométriques. Il existe d'ailleurs des méthodes plus expéditives pour calculer les sinus des arcs quelconques, par le moyen de séries convergentes qui se déduisent des équations du numéro 11. On les trouvera dans l'Introduction de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*.

20. La méthode que nous venons d'exposer pour former les tables de sinus, peut s'adapter à l'ancienne division du cercle en 360°; mais alors il faut partir du sinus du $\frac{1}{3}$ du quart du cercle, ou de 30°, parce qu'il est égal à la moitié du rayon; ce qu'on peut prouver ainsi :

On sait que le rayon est le côté de l'hexagone inscrit, ou, ce qui est la même chose, la corde du $\frac{1}{6}$ de la demi-circonférence, c'est-à-dire d'un arc de 60°: prenant donc la corde $APM = AC$, fig. 9, on aura $ANM = 60°$; et PM, moitié de AM ou de AC, sera le sinus de l'arc $MN = \frac{1}{2} ANM = 30°$; donc le sinus de $30° = \frac{1}{2} R$.

FIG. 9.

21. Pour faciliter les calculs on a substitué depuis long-temps aux valeurs des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, leurs logarithmes; et dans la plupart des tables, on ne trouve plus que ces derniers; en sorte que;

par leurs moyen, on résout toujours l'une ou l'autre de ces questions :

1°. *Un arc étant donné, trouver le logarithme de son sinus, ou celui de son cosinus, ou celui de sa tangente, ou celui de sa cotangente.*

2°. *Connoissant le logarithme du sinus, ou celui du cosinus, ou celui de la tangente, ou celui de la cotangente d'un arc, trouver cet arc.*

La solution de ces questions tient à la disposition des tables, disposition qui n'est pas la même dans toutes, et qui se trouve toujours expliquée en tête de chacune d'elles; c'est pourquoi nous n'en parlerons point ici. Nous nous bornerons à indiquer les tables de Callet, comme les meilleures relativement à l'ancienne division, et celles de Borda ou celles de MM. Hobert et Ideler, par rapport à la nouvelle.

Les tables trigonométriques n'embrassent que l'étendue du quart de cercle; mais elles donnent malgré cela les sinus et les cosinus, les tangentes et les cotangentes, pour tous les arcs, quelque grands qu'ils soient, ainsi que nous allons le faire voir en examinant la marche des lignes trigonométriques par rapport aux divers degrés de grandeur par lesquels peut passer un arc de cercle.

22. Pour bien comprendre ce qui va suivre, il faut se pénétrer d'avance de la continuité qui règne toujours entre les différens résultats qu'on déduit d'une même expression algébrique, ou d'une même construction géométrique, et qui consiste en ce que chaque valeur que prend l'expression dont il s'agit, est toujours précédée ou suivie de valeurs qui diffèrent aussi peu qu'on voudra de la première, et en ce que, dans la description d'une ligne, chaque point est toujours précédé ou suivi de points qui lui sont immédiatement contigus. Cela posé, si on con-

FIG. 10. çoit que le rayon MC, fig. 10, d'abord couché sur AC, tourne autour du point C, comme sur une charnière, ce rayon formera successivement, avec AC, tous les angles possibles; et le point M, situé à son extrémité, passera sur tous les points de la circonférence du cercle $ABA'B'A$, ou, ce qui est la même chose, la décrira. En suivant avec attention le mouvement que nous venons d'indiquer, on voit d'abord qu'au point A, où l'arc est nul, le sinus est nul aussi, et le cosinus ne diffère pas du rayon AC. Lorsque le rayon CM s'est détaché de AC, le sinus PM augmente à mesure que le point M, que j'appellerai désormais le *point décrivant*, s'avance vers B; et quand il y est parvenu, PM devient égal à CB, ou au rayon. Dans les mêmes circonstances, le cosinus PC diminue sans cesse, et devient nul lorsque le point M est en B; l'angle ACB est alors droit, et l'arc $AB = \frac{1}{2}\pi$. Le point M continuant son mouvement au-delà du point B, le sinus décroît, et le cosinus, qui tombe maintenant sur le diamètre AA', d'un côté du point C, opposé à celui où il étoit avant le point B augmente. C'est ce que prouve la seule inspection de la figure : $P'M'$, sinus de ABM', est moindre que BC, sinus de AB; et CP', cosinus du premier de ces arcs, surpasse le cosinus du second, qui est nul. Il est à propos de remarquer que $P'M'$ et CP' sont respectivement le sinus et le cosinus de l'arc $A'M'$, compté du point A' et supplément de ABM'; d'où il suit qu'*un angle obtus a le même sinus et le même cosinus que son supplément.*

Lorsque le point M' est parvenu en A', le sinus est nul comme au point A, et le cosinus est encore une fois égal au rayon. Au point A', l'arc ABA' est égal à la demi-circonférence, ou à $\frac{1}{2}\pi$: l'angle ACM a atteint sa plus grande limite, mais rien ne s'oppose à ce que le rayon

CM et le point décrivant ne continuent leur mouvement et ne passent au-dessous du diamètre AA'. Le sinus, qui devient alors $P''M''$, tombe aussi au-dessous du diamètre, et augmente à mesure que le point M'' s'approche de B', tandis que le cosinus CP'' diminue. Au point B', où l'arc $ABA'B'$ est les $\frac{3}{4}$ de la circonférence, ou $\frac{3}{2}\pi$ l'un est égal au rayon CB', et l'autre est nul. Enfin, depuis B' jusqu'en A, le sinus $P'''M'''$, toujours au-dessous de AA', diminue sans cesse, et le cosinus CP''', qui se trouve alors du même côté où il étoit dans le premier quart de cercle AB, augmente et devient égal au rayon en A. A ce point le sinus est nul, le rayon décrivant a achevé une révolution, mais il en peut recommencer une autre; et considérant toujours comme un seul arc la totalité du chemin parcouru par le point M, depuis le commencement du mouvement, on aura des arcs plus grands que la circonférence, et qui auront les mêmes sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, que ceux qui ont été décrits dans la première révolution. Ces considérations mènent à des conséquences très-importantes pour l'analyse, et que j'ai développées dans le IIIe chapitre du premier volume de mon *Calcul differentiel et intégral.* FIG. 10.

23. Cherchons maintenant comment les expressions analytiques des sinus et cosinus répondent aux diverses circonstances que nous venons de remarquer. Pour cela, faisons d'abord $a = \frac{1}{4}\pi$ dans les équations

$$\left.\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

En observant que $\cos \frac{1}{4}\pi = 0$, et que $\sin \frac{1}{4}\pi = 1$, nous trouverons

$$\cos(\tfrac{1}{4}\pi \pm b) = \mp \sin b$$
$$\sin(\tfrac{1}{4}\pi \pm b) = \cos b$$

FIG. 10. d'où il suit que si l'on regarde comme positifs le sinus et le cosinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, le cosinus d'un arc plus grand sera négatif, tandis que son sinus sera positif. Si l'on fait aussi $b = \frac{1}{4}\pi$, on aura $\cos \frac{1}{2}\pi = -1$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 0$.

Supposons ensuite que, dans les équations (A), $a = \frac{1}{2}\pi$, nous obtiendrons, d'après ce qui précède,

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = -\cos b$$
$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = \mp \sin b,$$

ce qui nous montre que tout arc compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$ aura son sinus et son cosinus négatifs; et lorsque $b = \frac{1}{4}\pi$, on a

$$\cos \tfrac{1}{4}\pi = 0, \qquad \sin \tfrac{1}{4}\pi = -1.$$

Examinons enfin le cas où $a = \frac{3}{4}\pi$: en vertu des valeurs précédentes, les équations (A) se réduisent dans ce cas à

$$\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = \pm \sin b$$
$$\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = -\cos b$$

et il s'ensuit que tout arc compris entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{4}{4}\pi$ ou π, a son cosinus positif et son sinus négatif.

En récapitulant ces résultats on verra,

1°. Que depuis le point A jusqu'au point A', où l'arc $ABA' = \frac{1}{2}\pi$, les sinus sont positifs;

2°. Que depuis le point A' jusqu'au point A, où l'arc $ABA'B'A = \pi$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}\pi$, jusqn'à π, les sinus sont négatifs;

3°. Que depnis le point A jusqu'au point B, où l'arc $AB = \frac{1}{4}\pi$, les cosinus sont positifs;

4°. Que depuis le point B jusqu'au point B', où l'arc $ABA'B' = \frac{3}{4}\pi$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}\pi$ à $\frac{3}{4}\pi$, les cosinus sont négatifs;

5°. Enfin que depuis le point B' jnsqu'an point A, où

l'arc $ABA'B'A = \pi$, c'est à-dire de $\frac{1}{4}\pi$ à π, les cosinus sont positifs. FIG. 10

Et l'on remarquera sans peine que les sinus changent de signe lorsqu'ils passent au dessous du diamètre AA', et les cosinus lorsqu'ils passent d'un côté à l'autre du point C, ou qu'ils tombent en-deçà ou en-delà du diamètre BB', perpendiculaire au premier.

24. En suivant le cours des tangentes on trouvera qu'elles augmentent sans cesse depuis le point A jusqu'au point B, où l'arc AM est devenu égal à $\frac{1}{4}\pi$. A ce point, la sécante NC se confondant avec CB, est parallèle à la tangente AN, et ne la rencontre par conséquent plus; en sorte que l'arc AB n'a point, à proprement parler, de tangente trigonométrique. On dit cependant que sa tangente est infinie; mais par cette expression, il faut entendre qu'en prenant le point M aussi près du point B qu'il sera nécessaire, on trouvera une tangente AN plus grande que telle quantité qu'on voudra. C'est aussi ce que prouve l'équation $\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}$, qui donne pour tang a une valeur d'autant plus grande, que cos a est plus petit, ou qu'on approche davantage du point B.

Lorsqu'on a $a = 0^q,50$, on a $\cos a = \sin a$, et par conséquent $\text{tang } 0^q,50 = 1$.

On prouve la même chose par le triangle CAN, qui devient isocèle dans ce cas, puisque l'angle ACN étant égal à la moitié d'un droit, il en est nécessairement de même de l'angle ANC; la tangente AN est donc égale au rayon.

Quand l'arc AM est plus grand que $\frac{1}{4}\pi$, le rayon MC ne rencontre plus la ligne AN au-dessus du diamètre, mais au-dessous. La véritable tangente AN' est égale,

FIG. 10. ainsi qu'il est facile de le voir, à $A'n'$ tangente de l'arc $A'M'$, supplément de AM', mais se trouve placée dans un sens opposé. Dans le troisième quart du cercle, la tangente qui a été nulle au point A', repasse au-dessus du diamètre AA', et AN est encore la tangente de l'arc $AA'M''$. Le rayon devenant encore parallèle à AN au point B', la tangente est encore infinie à ce point, passé lequel elle revient au-dessous du diamètre : en effet, l'arc $AA'M'''$ par exemple, a évidemment pour tangente AN'.

25. Voyons maintenant ce qui résulte de l'expression algébrique de la tangente,

$$\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Il est visible que sa valeur sera positive dans tous les cas où le sinus et le cosinus seront de même signe, ce qui a lieu depuis o jusqu'à $\frac{1}{4}\pi$ et depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\frac{3}{4}\pi$; elle sera par conséquent négative depuis $\frac{1}{4}\pi$ jusqu'à $\frac{1}{2}\pi$, et depuis $\frac{3}{4}\pi$, jusqu'à π; d'où il suit que, pour les tangentes comme pour les sinus et les cosinus, les changemens de signe correspondent aussi aux changemens de situation. On trouveroit de même que les cotangentes sont positives depuis o° jusqu'à $\frac{1}{4}\pi$, depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\frac{3}{4}\pi$, et négatives depuis $\frac{1}{4}\pi$ jusqu'à $\frac{1}{2}\pi$, depuis $\frac{3}{4}\pi$ jusqu'à π.

26. La proposition que nous avons démontrée n° 11 a de nombreuses conséquences, dont quelques-unes nous seront nécessaires dans la suite; c'est pourquoi nous les placerons ici.

1°. En ajoutant entre elles les deux équations

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}$$

$$\sin(a-b)=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{R},$$

nous aurons

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=\frac{2\sin a\cos b}{R},$$

d'où

$$\sin a\cos b=\frac{R}{2}\sin(a+b)+\frac{R}{2}\sin(a-b).$$

2°. En retranchant la seconde équation de la première, on aura

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=\frac{2\sin b\cos a}{R},$$

d'où

$$\sin b\cos a=\frac{R}{2}\sin(a+b)-\frac{R}{2}\sin(a-b).$$

Lorsque $a=b$, cette formule et la précédente donnent

$$\cos a\sin a=\frac{R}{2}\sin 2a.$$

3°. En ajoutant entre elles les deux équations

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{R},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{R},$$

on aura

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=\frac{2\cos a\cos b}{R},$$

d'où

$$\cos a\cos b=\frac{R}{2}\cos(a+b)+\frac{R}{2}\cos(a-b).$$

Lorsque $a=b$, cette formule donne

$$\cos a^2=\frac{R}{2}\cos 2a+\frac{R^2}{2},$$

en observant que le cosinus est égal au rayon, lorsque l'arc est nul.

4°. En retranchant la première de la seconde, il viendra

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=\frac{2\sin a\sin b}{R},$$

d'où

$$\sin a\sin b=\frac{R}{2}\cos(a-b)-\frac{R}{2}\cos(a+b).$$

Lorsque $a=b$, cette formule donne

$$\sin a^2=\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2}\cos 2a.$$

5°. Si l'on fait $a+b=a'$, $a-b=b'$, on trouvera, en ajoutant ces deux équations, $2a=a'+b'$, et en retranchant la seconde de la première, $2b=a'-b'$; il suit de-là que $a=\frac{a'+b'}{2}$, $b=\frac{a'-b'}{2}$.

Mettant ces valeurs de a et de b, dans les expressions de $\sin a\cos b$, $\sin b\cos a$, $\cos a\cos b$, $\sin a\sin b$, obtenues précédemment, on trouvera

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+b')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\sin a'+\sin b')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')\cos\tfrac{1}{2}(a'+b')=\frac{R}{2}(\sin a'-\sin b')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a'+b')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos a'+\cos b')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+b')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos b'-\cos a')$$

Divisant la seconde des formules précédentes par la première, on aura

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')}=$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\cos\frac{1}{2}(a'-b')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin a'-\sin b'}{\sin a'+\sin b'}.$$

Observant ensuite que $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{tang } A}{R}$ (8), et que par conséquent $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R}{\text{tang } A}$, on obtiendra

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a' - b')}{\text{tang } \frac{1}{2}(a' + b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}.$$

On conclura de même des deux dernières formules rapportées ci-dessus, que

$$\frac{\cos b' - \cos a'}{\cos a' + \cos b'} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a' + b') \text{ tang } \frac{1}{2}(a' - b')}{R^2}.$$

6°. En divisant l'expression de $\sin(a \pm b)$ par celle de $\cos(a \pm b)$, on aura

$$\frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b};$$

divisant ensuite le numérateur et le dénominateur de la fraction du second membre par $\cos a \cos b$, elle deviendra

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}};$$

et comme en général $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{tang } A}{R}$ (8), on obtiendra par ce moyen

$$\frac{\text{tang}(a \pm b)}{R} = \frac{\frac{\text{tang } a}{R} \pm \frac{\text{tang } b}{R}}{1 \mp \frac{\text{tang } a}{R} \cdot \frac{\text{tang } b}{R}} = \frac{R(\text{tang } a \pm \text{tang } b)}{R^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b},$$

et enfin $\text{tang}(a \pm b) = \frac{R^2(\text{tang } a \pm \text{tang } b)}{R^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b}$.

En se rappelant que $\cot A = \frac{R^2}{\text{tang } A}$ (9), on trouvera

$$\cot(a \pm b) = \frac{R^2}{\tang(a \pm b)} = \frac{R^2 \mp \tang a \tang b}{\tang a \pm \tang b} =$$

$$\frac{R^2 \mp \dfrac{R^2}{\cot a} \cdot \dfrac{R^2}{\cot b}}{\dfrac{R^2}{\cot a} \pm \dfrac{R^2}{\cot b}},$$

et en réduisant, on parviendra à

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp R^2}{\cot b \pm \cot a}.$$

27. L'équation $\dfrac{\tang \frac{1}{2}(a' - b')}{\tang \frac{1}{2}(a' + b')} = \dfrac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}$, de laquelle il résulte que *la somme des sinus de deux arcs est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence,* s'obtient immédiatement par une construction géométrique fort élégante.

FIG. 10*. AM et AN, fig. 10*, étant les deux arcs a' et b', on aura $MP = \sin a'$, $NQ = \sin b'$; menant NC parallèle au diamètre AB, prolongeant MP jusqu'en M', on aura

$$MR = MP - NQ = \sin a' - \sin b',$$
$$MR = M'P + NQ = \sin a' + \sin b' \text{ (14).}$$

Cela fait, si du point C, comme centre, et d'un rayon CD, égal à celui du cercle ACB, on décrit un arc EDG, que l'on mène au point D de cet arc une tangente terminée par les droites CM et CM', il est visible que DF et DH seront les tangentes des arcs DE et DG, qui mesurent les angles MCN et NCM' ; et comme ces angles ont leur sommet à la circonférence du cercle ACB, ils auront aussi pour mesure la moitié de

$$NM = AM - AN = a' - b',$$

et celle de

$$NM' = AM' + AN = a' + b'.$$

On aura donc

$$DF = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a' - b'), \qquad DH = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a' + b').$$

Mais à cause des parallèles MM' et FH, on aura cette proportion

$$MR : M'R :: DF : DH,$$

$$\sin a' - \sin b' : \sin a' + \sin b' :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a' - b') : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a' + b'),$$

ce qui revient à l'équation proposée.

Il seroit facile de modifier la construction ci-dessus de manière à en déduire les diverses équations analogues à celle qu'on vient de démontrer.

28. Comme on a souvent occasion de faire usage des formules auxquelles nous sommes parvenus précédemment, nous les avons réunies dans le tableau suivant, avec d'autres qui s'en déduisent par des procédés faciles à imaginer. Les numéros qu'on lit après chaque formule marquent les articles où elles ont été trouvées, ou desquels on peut les conclure.

TABLE

des figures trigonométriques les plus usitées.

$$\sin a^2 + \cos a^2 = R^2 \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{R} \\ \cos(a \pm b) &= \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R} \end{aligned}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos b &= \tfrac{1}{2} R[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2} R[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2} R[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2} R[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \end{aligned}\right\} (26)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \sin a - \sin b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a + \cos b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a - \cos b &= -\frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \end{aligned}\right\} (26)$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R} \ (11), \quad \sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{2R^2 - 2R \cos a} \ (13)$$

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} = \frac{2 \cos a^2 - R^2}{R} \ (11)$$

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2} R (R - \cos 2a) \ (26)$$

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} R (R + \cos 2a) \ (26)$$

$$\sin a^2 - \sin b^2 = \cos b^2 - \cos a^2 = \sin(a+b) \sin(a-b) \ (11, 10)$$

$$\cos a^2 - \sin b^2 = \cos(a+b) \cos(a-b) \ (11, 10)$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \sin a}{\cos a} \ (8), \quad \cot a = \frac{R^2}{\operatorname{tang} a} = \frac{R \cos a}{\sin a} \ (9)$$

$$\operatorname{séc} a = \frac{R^2}{\cos a}, \quad \operatorname{coséc} a = \frac{R^2}{\sin a} \ (8)$$

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{R \sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{R^2 (\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b)}{R^2 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \ (26)$$

Suite de la Table des formules trigonométriques.

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\
\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b &= \frac{R^2 \sin(a-b)}{\cos a \cos b} \\
\cot a + \cot b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\sin a \sin b} \\
\cot a - \cot b &= -\frac{R^2 \sin(a-b)}{\sin a \sin b}
\end{aligned}\right\} (8, 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} b^2 &= \frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2} \\
\cot a^2 - \cot b^2 &= -\frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin a^2 \sin b^2}
\end{aligned}\right\} (8, 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)} \\
\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R + \cos a} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{R} \\
\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} &= -\frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R - \cos a} = \frac{\cot \frac{1}{2} a}{R} \\
\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}{R} \\
\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} &= -\frac{\cot \frac{1}{2}(a+b)}{R} \\
\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} &= -\frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b}
\end{aligned}\right\} (26)$$

$$\sin a = \frac{R \operatorname{tang} a}{\sqrt{R^2 + \operatorname{tang} a^2}}, \quad \cos a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \operatorname{tang} a^2}} \quad (8, 10)$$

$$R = \sin 1^q = \cos 0^q = \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}{}^q = \cot \tfrac{1}{4}{}^q = \sec 0^q = \operatorname{cosec} 1^q = \tfrac{1}{2} \sec \tfrac{2}{3}{}^q \quad (23, 24)$$

$$\sin a = \tfrac{1}{2} \operatorname{corde} 2a \quad (14),$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(1^q \pm a) &= +\cos a, & \cos(1^q \pm a) &= \mp \sin a \\
\sin(2^q \pm a) &= \pm \sin a, & \cos(2^q \pm a) &= -\cos a \\
\sin(3^q \pm a) &= -\cos a, & \cos(3^q \pm a) &= \pm \sin a \\
\sin(4^q \pm a) &= \pm \sin a, & \cos(4^q \pm a) &= +\cos a
\end{aligned}\right\} (23)$$

29. Appliquons maintenant les tables trigonométriques à la résolution des triangles rectangles, et rappelons-nous que, par le moyen de ces tables, lorsqu'un angle est connu, la valeur de son sinus, celle de son cosinus, celle de sa tangente, et celle de sa cotangente sont connues aussi, et que, réciproquement, quand la valeur de l'une de ces lignes est donnée, celle de l'arc doit être regardée comme donnée.

FIG. 11. Soit CDE, fig. 11, un triangle rectangle en D; de l'un des angles aigus C, décrivons, avec un rayon égal à celui des tables, l'arc AM; abaissons PM perpendiculaire sur AC; élevons la tangente CN; nous formerons les deux triangles des tables, savoir : CPM qui sera celui du sinus et du cosinus, et CAN celui de la tangente et de la sécante; l'un et l'autre seront semblables au triangle proposé. En les comparant successivement avec celui-ci, on en tirera

$$\left.\begin{array}{l} CM : MP :: CE : DE \\ CM : CP :: CE : CD \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} R : \sin C :: CE : DE \\ R : \cos C :: CE : CD \end{array}\right.$$

$$CA : AN :: CD : DE \quad \text{ou} \quad R : \text{tang} C :: CD : DE$$

L'angle E étant complément de l'angle C, on aura $\cos C = \sin E$; les deux premières proportions peuvent se réunir dans une seule et s'énoncer ainsi : *Le rayon est au sinus de l'un des angles aigus du triangle rectangle proposé, comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle.*

La troisième nous apprend que *le rayon est à la tangente de l'un des angles aigus du triangle rectangle proposé, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle aigu est au côté opposé.*

Le rayon étant toujours donné, il suffira de connoître deux des trois autres termes de chacune des proportions que nous venons d'énoncer, pour trouver celui qui reste.

Ainsi

Ainsi, par la première on déterminera toujours une de ces trois choses, *l'hypothénuse*, *un côté* et *un angle aigu*, lorsqu'on en connoîtra deux.

J'ai mis simplement un angle aigu, quoique la porportion exige que cet angle soit opposé au côté donné ou cherché, parce qu'un des angles aigus fait trouver l'autre sur-le-champ; et que par conséquent si celui qu'on connoît ou qu'on cherche, ne remplit pas cette condition, on peut employer son complément.

Par la seconde proportion on déterminera toujours une de ces trois choses : *les deux côtés d'un angle droit* et *un angle aigu*, lorsqu'on en connoîtra deux.

Il suit de-là, 1°. que, connoissant un côté et un angle d'un triangle rectangle, on peut calculer les deux autres côtés; 2°. que, connoissant deux quelconques des côtés, on peut calculer les angles aigus.

Ces deux cas ne comprennent pas celui où l'on a deux côtés quelconques d'un triangle, et où l'on cherche le troisième; mais celui-ci se résout immédiatement par la proposition connue du triangle rectangle qui donne FIG. 11.

$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CE}^2$ et d'où l'on tire $CE = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$.

Si l'on connoissoit l'hypothénuse CE, et l'un des côtés de l'angle droit DE, par exemple, on auroit

$$CD = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2};$$

en observant que $\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2 = (CE + DE)(CE - DE)$, et en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation $CD = \sqrt{(CE + DE)(CE - DE)}$, on trouveroit

$$lCD = \tfrac{1}{2}[l(CE + DE) + l(CE - DE)].$$

Lorsqu'on construit des formules qui doivent servir à des calculs numériques, il faut toujours tâcher de les préparer de manière qu'on puisse y appliquer les logarithmes

FIG. 11. commodément; c'est-à-dire qu'on ne soit obligé de passer des logarithmes aux nombres, et de repasser de ceux-ci aux premiers, que le moins qu'il est possible. En appliquant les logarithmes à la recherche de CD, au moyen de sa première expression, on sentira bien évidemment l'objet de notre remarque.

Nous terminerons cet exposé des principes qui servent à résoudre les triangles rectangles; en observant que les deux cas que nous venons de traiter en dernier lieu se résolvent aussi par les deux proportions rapportées au commencement de cet article; car, 1°. si, connoissant CD et DE, on veut trouver CE, on pourra calculer l'un des angles aigus, C, par exemple, par la proportion $R : \text{tang } C :: CD : DE$; ayant trouvé cet angle, on calculera l'hypothénuse CE par la proportion $R : \sin C :: CE : DE$, dans laquelle on connoîtra les trois termes R, $\sin C$ et DE. 2°. Lorsque l'on connoîtra l'hypothénuse CE et l'un des deux autres côtés, CD, par exemple, on calculera l'angle aigu opposé au côté cherché, par la proportion $R : \sin E$, ou $\cos C :: CE : CD$; puis on trouvera le côté DE par la proportion $R : \sin C :: CE : DE$.

30. On peut résumer ce qui vient d'être dit sur les triangles rectangles d'une manière commode, en désignant leurs angles par A, B, C; A étant l'angle droit, et nommant a, b et c les côtés qui sont respectivement opposés

FIG. 12. à chacun de ses angles, ainsi que le montre la figure 12. On aura d'abord par le premier principe

$$R : \sin C :: a : c, \qquad R : \sin B :: a : b,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R};$$

chassant a de ces deux équations, ce qui se fait en divi-

sant chaque membre de la première par son correspondant dans la seconde, on trouvera

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B};$$

et comme $\sin B = \cos C$, et que $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\text{tang } C}{R}$, il en résultera $\frac{c}{b} = \frac{\text{tang } C}{R}$, équation qui représente le second principe énoncé dans le numéro précédent.

Enfin, si l'on quarre chaque membre des deux premières équations, et qu'on ajoute ensuite membre à membre les équations résultantes, en observant que

$$\sin C^2 + \sin B^2 = \sin C^2 + \cos C^2 = R^2 \text{ (10)},$$

on aura

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1, \text{ ou } b^2 + c^2 = a^2.$$

Il suit de-là que les deux équations

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R},$$

suffisent conjointement avec la relation qui existe entre les angles B et C, pour résoudre tous les cas des triangles rectangles.

31. Le principe sur lequel est fondée la résolution des triangles rectangles, conduit à celle des triangles quelconques. En abaissant de l'angle B du triangle ABC, fig. 13, une perpendiculaire BD, on formera deux triangles ABD, BDC, rectangles en D; on aura dans le premier FIG. 13.

$$R : \sin A :: AB : BD,$$

et dans le second

$$R : \sin C :: BC : BD,$$

ce qui donnera

$$R \times BD = \sin A \times AB, \qquad R \times BD = \sin C \times BC,$$

et d'où il suit par conséquent

$AB \times \sin A = BC \times \sin C$, ou $\sin A : \sin C :: BC : AB$.

Lorsque la perpendiculaire tombe en-dehors, l'angle C n'est pas commun au triangle ABC et au triangle BCD; mais l'angle BCD et l'angle BCA, valant ensemble deux angles droits, ont le même sinus.

La proportion que nous venons d'obtenir peut se convertir en principe général, et s'énoncer ainsi : *Dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.*

32. La même proposition se démontre aussi de la manière suivante, qui paroît plus analogue à l'idée que l'on a donnée de la trigonométrie dans les numéros 1 et 2.

FIG. 13*. Ayant inscrit le triangle ABC, *fig.* 13*, dans un cercle, si l'on décrit du centre O de ce cercle, et avec un rayon Oa, égal à celui des tables, un arc abc, puis qu'on joigne par des droites ab, bc et ac, les points où les rayons AO, BO, CO, rencontrent le cercle des tables, on formera un triangle abc semblable au triangle proposé, et dont les côtés ab, bc et ac se déduiront des tables.

La similitude des deux triangles ABC et abc devient évidente lorsque l'on remarque que les droites aO, bO et cO étant égales comme rayons d'un même cercle, ainsi que les droites AO, BO, CO, les triangles ABO, BOC, et AOC, ont leurs côtés, AO et BO, BO et CO, AO et CO, coupés proportionnellement aux points a et b, b et c, a et c, et que par conséquent les droites AB et ab, BC et bc, AC et ac, sont respectivement parallèles.

On a donc

$$AB : BC : AC :: ab : bc : ac,$$

ou

$$:: \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}bc : \tfrac{1}{2}ac.$$

Les angles du triangle abc, ayant leur sommet placé à la circonférence, ont respectivement pour mesure la

moitié de l'arc soutendu par le côté qui leur est opposé, et chacun de ces arcs aura évidemment pour sinus la moitié du côté qui le soutend (14) : donc

$$\tfrac{1}{2}ab = \sin c = \sin C,$$
$$\tfrac{1}{2}bc = \sin a = \sin A,$$
$$\tfrac{1}{2}ac = \sin b = \sin B,$$

et par conséquent

$$AB : BC : AC :: \sin C : \sin A : \sin B.$$

La comparaison des triangles AOB et aob, montre de plus que $AB : ab :: AO : aO$, ou que $AB : 2\sin C :: AO : aO$; c'est-à-dire que *chaque côté du triangle* ABC *est au double du sinus de l'angle qui lui est opposé, comme le rayon du cercle circonscrit est à celui des tables* (*).

33. Désignons, comme dans le n°. 30, les trois angles par A, B, C, et les côtés respectivement opposés à chacun de ces angles, par a, b, c ; nous aurons, d'après ce procède, les proportions

$$\sin A : \sin B :: a : b,$$
$$\sin A : \sin C :: a : c,$$
$$\sin B : \sin C :: b : c,$$

desquelles nous déduirons les équations

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

On résoudra immédiatement par ces proportions un triangle : 1°. lorsqu'on y connoîtra deux angles et un côté, puisqu'alors tous les angles seront donnés, et que

(*) On pourroit considérer les lignes ab, bc et ac comme les sinus mêmes de ces angles A, B, C, en prenant pour unité le diamètre du cercle abc ; c'est ainsi que Carnot les a présentées dans l'ouvrage intitulé *de la corrélation des figures de géométrie*. On y trouve d'après cette définition une démonstration très-simples et très-élégante de la proposition du n° 11 et de ses dérivées les plus importantes.

les côtés cherchés seront nécessairement opposés à deux de ces angles ; si, par exemple, a est donné, ainsi que les angles B et C, on retranchera la somme de ces angles de deux droits, pour avoir l'angle A, et les deux premières proportions feront connoître les côtés cherchés b et c.

2°. Quand on aura un angle et deux côtés dont l'un soit opposé à l'angle donné ; si, par exemple, on avoit l'angle A avec les côtés a et b, on calculeroit l'angle B par la première proportion, et connoissant alors deux angles, on retomberoit dans le cas précédent.

Il y a deux cas qui, n'étant pas compris dans ceux que nous venons d'examiner, semblent échapper à la méthode : ce sont ceux dans lesquels on connoît deux côtés et l'angle compris, ou bien les trois côtés : nous allons nous en occuper successivement.

34. Supposons que l'on connoisse les deux côtés a et b, et l'angle compris C, et mettons les équations

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B},$$

sous la forme

$$a \sin C = c \sin A, \qquad b \sin C = c \sin B.$$

En ajoutant d'abord les dernières membre à membre, puis retranchant ensuite l'une de l'autre, nous trouverons

$$(a + b) \sin C = c (\sin A + \sin B)$$
$$(a - b) \sin C = c (\sin A - \sin B) ;$$

divisant le dernier résultat par le premier, le côté inconnu c disparoît, et on a

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.$$

Or, on a vu (26) que

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)};$$

on en conclura

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)} (*),$$

d'où on déduira la proportion

$$a+b : a-b :: \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B),$$

qui s'énonce ainsi : *La somme des deux côtés d'un triangle est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence.*

Tout est connu dans cette proportion, à l'exception de $A-B$; car si on retranche de deux quadrans la mesure de l'angle connu C, le reste sera celle de $(A+B)$; prenant par conséquent la valeur de tang $\frac{1}{2}(A-B)$, il viendra

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \times \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B),$$

formule qui fera connoître $A-B$. Faisons $A+B=m$ et $A-B=n$, en ajoutant ces deux équations, nous trouverons

$$2A = m+n, \text{ ou } A = \frac{m+n}{2};$$

et si nous retranchons la seconde de la première, il viendra

$$2B = m-n, \text{ ou } B = \frac{m-n}{2}.$$

On voit par-là que, *connoissant la somme* m *et la diffé-*

(*) On peut aussi, pour plus de brièveté, faire la proportion

$$a : b :: \sin A : \sin B \quad (31),$$

de laquelle on tire immédiatement,

$$a+b : a-b :: \sin A + \sin B : \sin A - \sin B,$$

et l'on en conclura, par le n° 27,

$$a+b : a-b :: \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B).$$

rence n des deux angles demandés A *et* B, *on trouvera le plus grand, en ajoutant la moitié de la somme à la moitié de la différence, et le plus petit, en ôtant la moitié de la différence de la moitié de la somme.*

Lorsqu'on aura calculé tous les angles, on trouvera le troisième côté par la règle du numéro 31.

35. On peut aussi trouver immédiatement le troisième côté, en abaissant une perpendiculaire sur l'un des côtés donnés; de l'angle A, par exemple, sur le côté donné BC, *fig.* 14. On aura, par la propriété connue des triangles obliquangles, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \mp 2BC \times DC$, le signe supérieur ayant lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, comme dans la figure, et le signe inférieur dans le cas où elle tombe en dehors : de plus, dans le triangle rectangle ADC, on a (29) $DC = AC \times \sin DAC = AC \times \cos C$, en faisant $R = 1$; on conclura de-là $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC \times \cos C$, et par conséquent

FIG. 14.

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC.BC.\cos C},$$

formule qui revient, suivant la notation établie, à

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C},$$

et donnera le côté c par le moyen des deux autres a et b, et de l'angle C. On n'y a mis qu'un seul signe, parce que quand l'angle C est obtus, son cosinus est négatif, et change par conséquent le $-$ en $+$, comme l'exige la construction géométrique.

36. Cette formule ne se prête pas commodément au calcul logarithmique; mais comme on a

$$\cos 2C = 1 - 2\sin C^2 \text{ (26)},$$

on aura aussi

$$\cos C = 1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} C)^2,$$

en écrivant $\frac{1}{2}C$ à la place de C; et par cette transformation on obtiendra

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\,(\sin\tfrac{1}{2}C)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\,(\sin\tfrac{1}{2}C)^2}:$$

faisant ensuite $\frac{2\sin\frac{1}{2}C}{a-b}\sqrt{ab} = \text{tang}\,\alpha$, il en résultera $c = (a-b)\sqrt{1 + \text{tang}\,\alpha^2} = \frac{a-b}{\cos\alpha}$, puisque $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}\,\alpha^2}}$. On calculera facilement tang α par la première formule; et lorsqu'on sera parvenu à l'angle α, on aura par la seconde

$$c = \frac{a-b}{\cos\alpha}.$$

37. L'équation $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$ fait connoître l'angle C, lorsque les trois côtés a, b et c, sont donnés: en élevant chacun de ses membres au quarré, on en tire

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C,$$

d'où

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Si l'on écrit $2C'$ pour C, et qu'on mette $1 - 2\sin C'^2$ à la place de $\cos C$ (26), on aura cette expression:

$$2\sin C'^2 = 1 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab},$$

et par conséquent

$$\sin C'^2 = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4ab} =$$

$$\frac{\frac{(c+a-b)}{2}\,\frac{(c-a+b)}{2}}{ab};$$

mais il est facile de voir que

$$\frac{c+a-b}{2} = \frac{(c+a+b)}{2} - b,$$

$$\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a:$$

si donc on fait $c+a+b=f$, on aura, en prenant la racine quarrée, et en remettant $\frac{1}{2}C$ au lieu de C',

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}f-a)(\frac{1}{2}f-b)}{ab}},$$

formule qui conduit à la règle suivante :

Pour trouver un angle d'un triangle, lorsque les trois côtés sont connus, *de la demi-somme des trois côtés, retranchez successivement chacun de ceux qui comprennent l'angle cherché; multipliez les deux restes entre eux; divisez ce produit par celui des côtés qui comprennent l'angle cherché, et prenant la racine quarrée du quotient, vous aurez le sinus de la moitié de cet angle.*

38. La solution de tous les cas des triangles obliquangles ne dépend, comme on voit, que des trois règles énoncées dans les numéros 31, 34, 37, et repose sur le principe dont on a tiré la solution des triangles rectangles dans le numero 29. Il sera donc facile, avec un peu d'attention, de retenir ces règles; et le calcul des exemples que nous allons donner, suffira pour mettre le lecteur en état de les appliquer.

Exemples de la résolution des triangles rectangles.

1er. Supposons que dans le triangle rectangle BAC, *fig.* 12, on connoisse l'hypothénuse a et un côté c, et FIG. 12. qu'on cherche l'angle opposé C à ce côté; soit l'hypothénuse $a = 13^{\text{mètres}},178$, le côté $c = 7^{m},357$. On aura (30), pour déterminer sin C, la proportion

$$a : c :: R : \sin C,$$

d'où

$$\sin C = \frac{R \times c}{a},$$

et prenant les logarithmes,

$$l \sin C = lR + lc - la.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons désormais le rayon égal à l'unité : son logarithme sera zéro, il n'en faudra par conséquent tenir aucun compte; et au lieu d'effectuer les soustractions, nous emploierons les complémens arithmétiques dont la théorie est exposée à la fin de mes *Elémens d'Algèbre*. Voici l'opération :

$l c = l 7,357 =$ 0,8667008

comp. arith. $l a =$ comp. arith. $l 13,178 =$ 8,8801505

somme ou $l \sin C =$ 9,7468513

qui, dans les tables, répond à $0^{q},377 = C$.

2°. Supposons qu'on connoisse l'angle $B = 0^{q},4163$, l'hypothénuse $a = 33,253$, et qu'on cherche le côté b, on aura (30)

$$R : \sin B :: a : b.$$

d'où

$$b = \frac{a \times \sin B}{R}$$

$$lb = la + l\sin B - lR = la + l\sin B.$$

Or, $la = l 33,253 =$ 1,5218308

$l \sin B = l \sin 0,5837 =$ 9,7841210

somme ou $lb =$ 1,3059518

qui répond, dans les tables, à $20^m,2279 = b$, à moins d'un 10000e près.

3e. Supposons qu'on connoisse le côté $c = 5^m,391$, l'angle $B = 0^q,3502$, et qu'on cherche le côté b, on aura

$$R : \text{tang } B :: c : b,$$

d'où

$$b = \frac{c \times \text{tang } B}{R},$$

$$\text{l } b = \text{l } c + \text{l tang } B - \text{l } R.$$

Or, l c = l 5,391 = ... 0,7316693
l tang B = l tang $0^q,3502$ = ... 9,7876255
somme où l c = ... 10,5192948
qui répond, dans les tables, à $3^m,3059 = c$.

Exemples de la résolution des triangle sobliquangles.

1er. Supposons que l'on connoisse dans le triangle ABC le côté c, les angles A et B, et qu'on cherche le côté b.

Soit $A = 1^q,2805$, $B = 0^q,5879$, $c = 27^m,348$; l'angle C sera $2^q - (A + B) = 2^q - 1,8684 = 0,1316$, et on aura

$$\sin C : c :: \sin B : b,$$

d'où

$$b = \frac{c \times \sin B}{\sin C},$$

$$\text{l } b = \text{l } c + \text{l sin } B - \text{l sin } C.$$

Or, l c = l 27,348 = ... 1,4369256
lsin B = lsin 0^q5879 = ... 9,9018394
comp. arith. l sin C = comp. arith. l sin $0^q,1316$ = 0,6877217
somme ou l b 2,0264867
qui répond, dans les tables, à $106^m,289 = b$.

2e. Connoissant dans le triangle ABC les deux côtés a, b, et l'angle compris C, trouver le troisième côté c.

Soit $a = 28^m,442$, $b = 17^m,803$, $C = 0^q,8426$; commençons d'abord par trouver les autres angles. On aura (34)

$$a+b : a-b :: \text{tang}\frac{A+B}{2} : \text{tang}\frac{A-B}{2},$$

ou

$$\text{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{\left(\text{tang}\frac{A+B}{2}\right)(a-b)}{a+b},$$

ou

$$\text{l tang}\frac{A-B}{2} = \text{l tang}\frac{A+B}{2} + \text{l}(a-b) - \text{l}(a+b).$$

Or, $A+B = 2^q - C = 2 - 0^q,8426 = 1^q,1574$, et $\frac{A+B}{2} = 0_q,5787$;

$$a+b = 28,442 + 17,803 = 46,245,$$
$$a-b = 28,442 - 17,803 = 10,639;$$

l tang $\frac{A+B}{2}$ = l tang $0^q,5787$ = ... 0,1184874

l $(a-b)$ = l 10,639 = ... 1,0269008

comp. arith. l $(a+b)$ = comp. arith. 146,245 = 8,3349352

somme ou l tang $\frac{A-B}{2}$ = ... 9,4803234

qui répond à $0^q,1868$.

Donc $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A = 0^q,7655$,

et $\frac{A+B}{2} - \frac{(A-B)}{2} = B = 0_q,3919$.

Maintenant pour déterminer le côté c, on aura la proportion

$$\sin B : \sin C :: b : c,$$

d'où

$$c = \frac{b \times \sin C}{\sin B},$$

et

$$\text{l}\,c = \text{l}\,b + \text{l}\sin C - \text{l}\sin B.$$

Or, l b = l 17,803 = ... 1,2504932
l sin C = l sin 0,8426 = ... 9,9865885
comp. arith. l sin B = comp. arith. l sin 0^q,3919 = 0,2484898

somme ou l C = ... 1,4855715
qui répond, dans les tables, à 30^m,589 = c.

3e. Connoissant, dans le triangle ABC, les trois côtés a, b, c, trouver l'angle A.

Soit a = 29^m,037, b = 18^m,743, c = 13^m,782.

Suivant le numéro 37, on ajoutera les trois côtés a, b, c, entre eux, et de la moitié 30,781 de la somme 61,562; on retranchera successivement b, c, ce qui donnera pour reste 12,038 et 16,999 : on aura ensuite

l 16,999 = ... 1,2304234
l 12,038 = ... 1,0805543
comp. arith. l 18,743 ou b = ... 8,7271609
comp. arith. l 13,782 ou c = ... 8,8606878

somme 19,8988264
dont la moitié ou l sin $\frac{1}{2}A$ = ... 9,9494132
qui, dans la table, répond à 0^q,6987 = $\frac{1}{2}A$; donc A = 1^q,3974.

39. Un ouvrage de la nature de celui-ci ne sauroit comporter le détail des applications dont la trigonométrie rectiligne est susceptible; nous nous bornerons à indiquer la solution des deux questions que l'on peut regarder comme la base de l'art de lever les plans.

Voici l'énoncé de la première :

FIG. 15. *Etant donné de grandeur et de position, sur un plan, une ligne* AB, fig. 15, *déterminer, par rapport à cette ligne, la position d'un point* C, *situé dans le même plan, ou*, ce qui revient au même, *trouver les distances* AC *et* BC.

Pour la résoudre il faut mesurer la ligne AB, les an-

gles CAB et CBA; les distances cherchées AC et BC, se calculeront alors d'après la règle énoncée dans le n°. 31, et lorsqu'on les aura trouvées, on construira, au moyen d'une échelle de parties égales, sur les trois côtés donnés, le triangle ABC, qui fera connoître la position respective des trois points A, B et C (*).

On pourra ensuite, par la résolution du triangle rectangle ACP, dans lequel on connoîtra le côté AC et l'angle CAP, trouver la longueur de la perpendiculaire CP, abaissée sur AB, ou de la plus courte distance du point C à la ligne AB, et la grandeur du segment AP. Ces données serviront aussi à marquer la position du point C à l'égard de la ligne AB. On trouveroit de même la situation d'un second point D, qu'on pourroit apercevoir en même temps des deux quelconques des trois points A, B et C.

40. Lorsqu'on a déterminé immédiatement le point D par rapport à la ligne AB, en mesurant les angles DAB, DBA, on a tout ce qu'il faut pour connoître la distance réciproque des points C et D; car ayant résolu le triangle DAB, de même que le triangle CAB, et retranché ensuite l'angle DAB de l'angle CAB, on connoît alors, dans le triangle CAD, les deux côtés AC et AD, et l'angle CAD

(*) Je n'insiste point sur l'opération de la mesure des angles, parce que la vue des instrumens que l'on y emploie en apprend plus que tout ce qu'on peut dire à cet égard; et pour concevoir la possibilité de cette mesure, il suffit d'imaginer que l'on ait placé sur le point A le centre d'un secteur de cercle, dont les rayons soient dirigés suivant les côtés AB et AC, de l'angle qu'on se propose de connoître. Ceux qui voudront se livrer à la pratique de la levée des plans pourront consulter le *Traité de Trigonométrie* de Cagnoli, et l'article *Levée des plans*, dans le Dictionnaire de mathématiques de l'Encyclopédie méthodique.

qu'ils comprennent : l'application des règles du n°. 34 donne les deux autres angles DCA, CDA, et le troisième côté CD, qui est la distance cherchée. L'angle DCA donne la position de la droite CD; et en considérant AC comme sécante, la comparaison des angles DCA et CAB fait voir quelle est l'inclinaison de CD à l'égard de AB.

En partant des points C et D, on en pourra déterminer de nouveaux, que l'on n'appercevoit pas des deux premiers A et B; et continuant ainsi de proche en proche, on fixera la position respective de tous les points d'un pays : c'est ainsi qu'a été construite la carte de France, dirigée par Cassini.

41. La seconde question dont nous avons à nous occuper, n'est que la première rendue plus générale, en supposant que le point à déterminer soit situé hors du plan sur lequel se trouve la ligne AB. Soit C ce point, et ABC' le plan qui contient la ligne AB, *fig.* 16: la position du point C sera connue, si l'on a celle du pied c' de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan ABC', et la longueur de la perpendiculaire CC', qui marque de combien le point C est élevé au-dessus de C', qu'on nomme sa projection. Dans ce cas les angles $C'AB$ et $C'BA$ ne sont plus ceux qu'on mesure, mais on prend à leur place les angles CAB et CBA, situés dans le plan CAB, passant par les lignes AC et BC, menées des points donnés A et B, au point demandé; et pour fixer la position de ce plan, on mesure en outre l'angle DBC que fait la ligne CB avec la ligne BD, perpendiculaire au plan ABC', et par conséquent parallèle à la droite CC' (*). On ré-

FIG. 16.

(*) Lorsqu'il s'agit des points placés sur la surface de la terre, on choisit pour le plan ABC' un plan horizontal; les lignes CC' et BD sont

sout le triangle CAB comme le triangle CAB du n°. précédent, puisqu'on a les mêmes données dans l'un et dans l'autre ; ensuite, dans le triangle $C'BC$, rectangle en C', on connoît l'hypothénuse CB et l'angle $C'BC$, qui est la différence entre l'angle droit DBC' et l'angle mesuré DBC : on calcule les côtés CC' et $C'B$. Le premier est la hauteur du point C au-dessus du plan $C'AB$, et sert conjointement avec le côté AC, à déterminer AC' par le moyen du triangle CAC', rectangle en C' ; cela fait, on a les trois côtés du triangle $C'AB$, et le point C' est par conséquent donné.

---

sont alors verticales ; le plan $C'CB$ qui passe par ces lignes est vertical aussi, et se trouve déterminé par le point C qu'on apperçoit du point B, et par la ligne DB. La ligne $C'B$ est une ligne horizontale comprise dans ce plan.

CHAPITRE II.

De la trigonométrie sphérique.

42. Un triangle sphérique est celui que forment, sur la surface de la sphère, trois grands cercles qui se coupent deux à deux. Un triangle sphérique détermine toujours un angle trièdre (angle solide composé de trois plans), et réciproquement, d'un pareil angle on déduit aussi un triangle sphérique. En effet, soit ABC, *fig.* 17, un triangle sphérique quelconque, et concevons que l'on ait mené de chacun de ses angles, au centre de la sphère dont il fait partie, les rayons AS, BS, CS; les plans ABS, ACS, BCS, seront ceux des grands cercles sur lesquels sont pris les arcs AB, AC, BC, côtés du triangle proposé, et ces arcs mesurent les angles rectilignes compris sur chacune des faces de l'angle trièdre $SABC$, entre ses arêtes SA et SB, SA et SC, SB et SC. L'inclinaison de deux plans se mesure, comme on sait, par l'angle rectiligne formé par deux droites menées dans chacun de ces plans par un même point de leur commune section, perpendiculairement à cette ligne : il suit de-là que, si par le point A on tire les droites AI et AK perpendiculaires l'une et l'autre à AS, mais la première dans le plan CAS, et la seconde dans le plan BAS, l'angle rectiligne IAK mesurera l'inclinaison de ces deux plans. Il est d'ailleurs aisé de voir que la ligne AI sera tangente à l'arc AC, et que AK sera tangente à l'arc AB; et comme on prend pour l'angle que forment deux

FIG. 17.

lignes courbes, celui que comprennent les tangentes menées au point où elles se rencontrent, l'angle IAK sera donc aussi la mesure de l'angle fait par les arcs AC et AB. Il en seroit de même de chacun des deux autres angles du triangle; les inclinaisons des faces de l'angle trièdre $SABC$ ont donc la même mesure que l'angle correspondant du triangle sphérique BAC. Le triangle sphérique et l'angle trièdre sont composés par conséquent de six parties qui se correspondent, savoir : les trois côtés du triangle qui répondent aux angles des arêtes de l'angle trièdre, et les trois angles du triangle qui répondent aux inclinaisons réciproques des faces de l'angle trièdre.

Euler, qui s'est occupé à plusieurs reprises de la trigonométrie sphérique, pour la présenter sous des points de vue nouveaux, a donné, en 1779 (*), un mémoire que l'on peut regarder comme un traité complet de cette science; nous ne croyons pouvoir mieux faire que d'offrir à nos lecteurs ce travail, dans lequel nous avons fait quelques changemens qui nous ont paru propres à simplifier les résultats de cet illustre auteur.

43. Tout ce que nous avons à dire sur les triangles sphériques repose uniquement sur la construction suivante, qu'il est par conséquent important de bien saisir.

De l'angle C du triangle ABC, on abaisse une perpendiculaire CD sur le plan ASB du côté BA opposé à cet angle; du point D on mène les lignes ED, DF, respectivement perpendiculaires, sur SA et SB; on tire les lignes CE et CF, qui seront respectivement perpendiculaires aux lignes SA et SB (*Géomét.* 205). Il suit de-là

(*) Acta Academiæ scientiarum Petropolitanæ, anno 1779, pars prior.

que les angles CED et CFD, mesurent les inclinaisons des plans CSA et CSB, sur le plan ASB, ou, ce qui est la même chose, donnent la valeur des angles A et B du triangle sphérique ABC. Nous désignerons dorénavant les angles de ces triangles par la lettre placée à leur sommet, et les côtés qui leur sont opposés par une lettre semblable, mais prise dans le petit alphabet; ici, comme dans le numéro 30, le côté BC opposé à l'angle A, sera nommé a, et ainsi des autres. Le rayon des tables étant supposé égal à l'unité, nous aurons alors

$$CE = \sin CA = \sin b, \qquad SE = \cos CA = \cos b,$$
$$CF = \sin CB = \sin a, \qquad SF = \cos CB = \cos a.$$

Dans le triangle rectiligne CDE, rectangle en D, et dont l'angle $CED = A$, nous trouverons

$$CD = CE \sin CED = \sin b \sin A$$
$$DE = CE \cos CED = \sin b \cos A.$$

Par le triangle rectiligne CDF, pareillement rectangle en D, et dont l'angle $CFD = B$, nous obtiendrons

$$CD = CF \sin CFD = \sin a \sin B$$
$$DF = CF \cos CFD = \sin a \cos B.$$

Egalant entre elles les deux expressions de la ligne CD, nous en déduirons

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \ldots\ldots (A)$$

résultat qui est, par rapport aux triangles sphériques, l'analogue de celui du numéro 31.

Il est évident qu'on doit avoir de même les deux équations suivantes :

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C.$$

44. Maintenant, par le point E, menons EG perpendiculaire sur SB, et par le point D, tirons DH parallèle

à SB; nous formerons de cette manière un triangle rectangle HDE, dans lequel $HED = ASB$, puisqu'en retranchant l'angle GES de l'angle droit SED, on a pour reste HED, et que l'angle ASB ou ESG est aussi la différence entre un angle droit et l'angle GES. De la résolution du triangle EHD, on déduira par conséquent FIG. 17.

$$HD = DE \sin DEH = DE \sin c = \cos A \sin b \sin c$$

mais $SF = \cos a = SG + GF = SG + HD$, et $SG = SE \cos ESG = \cos a \cos b \cos c$: on aura donc

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c,$$

équation qui exprime la relation qui existe entre le côté a, les deux autres côtés b et c, et l'angle qu'ils comprennent.

Il est évident qu'en considérant en particulier chacun de ces derniers, on trouvera de même deux équations semblables à la précédente, et l'on formera de cette manière, entre les six parties du triangle ABC, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (B).$$

Ces trois équations renferment implicitement l'équation (A). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre les valeurs qu'elles donnent pour $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, et de les substituer dans les équations

$$\sin A^2 = 1 - \cos A^2$$
$$\sin B^2 = 1 - \cos B^2$$
$$\sin C^2 = 1 - \cos C^2.$$

On trouve par la première de celles-ci

$$\sin A^2 = 1 - \frac{\cos a^2 - 2\cos a\cos b\cos c + \cos b^2\cos c^2}{\sin b^2\sin c^2} =$$

$$\frac{\sin b^2\sin c^2 - \cos a^2 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos b^2\cos c^2}{\sin b^2\sin c^2} =$$

$$\frac{(1-\cos b^2)(1-\cos c^2) - \cos b^2\cos c^2 - \cos a^2 + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin b^2\sin c^2} =$$

$$\frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin b^2\sin c^2};$$

multipliant les deux termes de cette fraction par $\sin a^2$, et prenant ensuite la racine quarrée, on obtiendra

$$\sin A = \sin a \times \frac{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c} (*).$$

Si, pour abréger, on représente par M la quantité qui multiplie $\sin a$ dans le second membre de cette équation, on aura $\sin A = M\sin a$,

on trouvera de même

$$\sin B = M\sin b, \qquad \sin c = M\sin c,$$

et par l'élimination de M, on retombera sur les équations (A). Il est à propos de remarquer que les trois côtés a, b, c, entrent tous de la même manière dans l'expression de M, car c'est pour cela qu'elle est commune aux valeurs des sinus de chacun des angles.

Les équations (B) suffiront donc pour résoudre un

(*) Bertrand a donné le premier cette expression, et il a déduit en même temps des équations (B), que l'on doit regarder comme n'en formant qu'une seule, toutes les formules de la trigonométrie sphérique (*Développement de la partie élémentaire des Mathématiques*, tom. II, pag. 578 : Genève, 1778).

Lagrange a publié aussi sur cette matière, dans le sixième cahier du Journal de l'École Polytechnique, un mémoire où il montre que le numérateur de la fraction qui multiplie $\sin a$ est égal à six fois le volume du tétraèdre déterminé par les sommets des angles du triangle sphérique, et par le centre de la sphère.

triangle sphérique quelconque, lorsqu'on connoîtra trois de ses parties, en observant que le sinus et le cosinus ne doivent être regardés que comme une seule inconnue, puisqu'on peut toujours exprimer l'un par l'autre.

L'application des équations (B) aux différens cas qui peuvent se présenter, devient plus facile, au moyen de quelques transformations que nous allons faire connoître.

45. On peut y changer les angles dans les côtés qui leur sont opposés, et respectivement, en observant de donner le signe — aux cosinus. Pour le prouver, il faut éliminer cos a des deux dernières au moyen de la première, on trouvera

$$\cos b = \cos b \cos c^2 + \cos A \sin b \sin c \cos c + \cos B \sin a \sin c$$
$$\cos c = \cos b^2 \cos c + \cos A \sin b \sin c \cos b + \cos C \sin a \sin b.$$

En substituant dans ces résultats $1 - \sin c^2$ à $\cos c^2$, $1 - \sin b^2$ à $\cos b^2$, ils se réduisent; le premier devient divisible par $\sin c$, le second par $\sin b$, et ils peuvent ensuite s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \cos B \sin a &= \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c \\ \cos C \sin a &= \sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c \end{aligned}\right\} \ldots (C)$$

Si on multiplie la deuxième de ces équations par $\cos A$, qu'on l'ajoute à la première, et que l'on substitue $1 - \sin A^2$ au lieu de $\cos A^2$, on obtiendra

$$\sin a (\cos B + \cos A \cos C) = \sin A^2 \cos b \sin c;$$

mais il suit des équations (A) que $\sin c \sin A = \sin a \sin C$; faisant la substitution de cette valeur dans le second membre de l'équation ci-dessus, elle deviendra divisible par $\sin a$, et on aura pour résultat

$$\cos B + \cos A \cos C = \cos b \sin A \sin C,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos B = -\cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C.$$

En rapprochant cette équation des équations (B), on

voit qu'elle se déduiroit immédiatement de la seconde, en changeant les grandes lettres en petites, et réciproquement, et en affectant tous les cosinus du signe —. En effet, en opérant ainsi, il vient

$$-\cos B = \cos A \cos C - \cos b \sin A \sin C,$$

équation qui rentre dans la précédente lorsqu'on en change tous les signes.

Nous venons d'obtenir la relation qu'a l'angle B avec les deux angles A, C, et le côté b qu'ils interceptent; mais il est évident qu'il en existe de pareilles pour chacune des combinaisons semblables d'angles et de côtés: on a donc en même temps les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \cos a \sin B \sin C \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \cos c \sin A \sin B \end{aligned}\right\} \quad (B')$$

46. Il faut remarquer qu'en prenant les cosinus négativement, on passe des arcs a, b, c, et des angles A, B, C, à leurs supplémens, puisque $-\cos A = \cos(2^q - A)$, $-\cos a = \cos(2^q - a)$, et ainsi des autres (23). Si on substitue ces valeurs dans les équations ci-dessus, en faisant, pour abréger, $2^q - A = A'$, $2^q - a = a'$, &c elles prendront la forme

$$\left.\begin{aligned} \cos A' &= \cos B' \cos C' + \cos a' \sin B' \sin C' \\ \cos B' &= \cos A' \cos C' + \cos b' \sin A' \sin C' \\ \cos C' &= \cos A' \cos B' + \cos c' \sin A' \sin B' \end{aligned}\right\}$$

équations parfaitement semblables aux équations (B), et qui appartiennent par conséquent à un triangle sphérique dont les côtés sont A', B', C', et les angles a', b', c'. Un tel triangle a donc ses angles mesurés par les supplémens des côtés du triangle ABC, et ses côtés mesurent les supplémens des angles du même triangle: il est désigné, dans les livres de trigonométrie, sous le nom de

triangle supplémentaire, et on prouve que les sommets de ses angles sont les pôles des côtés du premier, *et vice versâ*.

47. Les équations obtenues dans le n°. 45 sous la désignation (G), qui renferment cinq parties du triangle sphérique ABC, peuvent se transformer en d'autres qui n'en contiennent plus que quatre. Il faut pour cela substituer, au lieu de $\sin a$, dans la première, $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$, et dans la seconde, $\frac{\sin c \sin A}{\sin C}$ (43), et comme $\frac{\cos p}{\sin p} = \cot p$, on trouvera alors

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b} \\ \cot C &= \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (D)$$

Il est facile de former, à l'inspection de ces valeurs, toutes celles qui leur sont analogues, en y permutant les lettres d'une manière convenable ; mais il importe surtout de remarquer que puisqu'elles sont déduites des équations (B), on y pourra changer de la même manière que dans celles-ci, les côtés en angles, et réciproquement, en affectant les cosinus et les cotangentes du signe contraire à celui qu'ils ont, et il viendra

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B} \\ \cot c &= \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (D')$$

48. Les cinq systèmes d'équations (A), (B), (B'), (D), (D'), donnent immédiatement la résolution de tous les cas que peut offrir un triangle sphérique quelconque. Le

premier exprime la relation qui existe entre les angles et les côtés opposés.

49. On tire du second les six formules suivantes;

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c\\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c\\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\},$$

dont les trois premiers font connoître un côté par le moyen des deux autres et de l'angle qu'ils comprennent, et dont les trois dernières donnent les angles par le moyen des côtés.

50. Le troisième système produit, de même que le précédent, six formules, qui sont :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$
$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

Les trois premières feront trouver un angle lorsque l'on connoîtra les deux autres et le côté intercepté entre eux. Les trois dernières donneront chacun des côtés lorsque tous les angles seront connus.

51. Le quatrième système, en y faisant toutes les permutations possibles, donne les six formules

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\sin C \sin a}$$

$$\cot B = \frac{\sin a \cos b - \cos C \cos a \sin b}{\sin C \sin b}$$

$$\cot A = \frac{\cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c}{\sin B \sin a}$$

$$\cot C = \frac{\sin a \cos c - \cos B \cos a \sin c}{\sin B \sin c}$$

$$\cot B = \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b}$$

$$\cot C = \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c},$$

par le moyen desquelles on déterminera deux des angles d'un triangle sphérique, lorsqu'on connoîtra le troisième angle et les côtés qui le comprennent.

52. Le cinquième système enfin conduit aux six formules suivantes :

$$\cot a = \frac{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}{\sin c \sin A}$$

$$\cot b = \frac{\sin A \cos B + \cos c \cos A \sin B}{\sin C \sin B}$$

$$\cot a = \frac{\cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C}{\sin b \sin A}$$

$$\cot c = \frac{\sin A \cos C + \cos b \cos A \sin C}{\sin b \sin C}$$

$$\cot b = \frac{\cos B \sin c + \cos a \sin b \cos C}{\sin a \sin B}$$

$$\cot c = \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin C},$$

qui serviront à déterminer deux des côtés d'un triangle lorsqu'on connoîtra le troisième et les deux angles qu'il intercepte.

53. Les quatre classes de formules que nous venons de rapporter, méritent la plus grande attention, tant par leur élégance que par la propriété qu'elles ont de faire connoître si l'arc ou l'angle qu'elles expriment est moindre ou plus grand qu'un quadrans ou qu'un angle droit, propriété que n'auroient point les expressions des sinus des mêmes arcs. En effet, le sinus d'un arc étant le même que celui du supplément de cet arc, tant par sa valeur que par son signe, toutes les fois que l'on ne connoît que le sinus d'un arc, il n'est pas possible de savoir si cet arc doit être plus petit ou plus grand qu'un quadrans; mais lorsqu'on a le cosinus ou la cotangente, et qu'on sait d'ailleurs que cet arc ne peut être égal à la demi-circonférence, ce qui est le cas des côtés des triangles sphériques et des arcs qui mesurent leurs angles, on voit par le signe du résultat, si l'arc cherché est compris ou non entre 1^q et 2^q. Le cosinus et la cotangente ont le signe — dans le premier cas, et le signe + dans le second. Si donc on a soin de donner aux quantités connues qui entrent dans les formules rapportées ci-dessus, les signes qui doivent les affecter d'après la valeur des arcs auxquels elles appartiennent, le signe du résultat fera connoître *l'espèce* du côté ou de l'angle cherché; c'est-à-dire s'il est plus petit ou plus grand qu'un quadrans, s'il est aigu ou obtus.

54. Ces mêmes formules se simplifient beaucoup lorsque le triangle proposé est rectangle; c'est-à-dire lorsqu'un de ses angles est droit. En effet, si l'on suppose que $C = 1^q$, on aura

$$\sin C = 1, \qquad \cos C = 0;$$

et il viendra

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (49)$$

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \cot A \cot B \quad (50)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \sin B \cos a \\ \cos B &= \sin A \cos b \end{aligned}\right\} (50)$$

$$\sin a = \sin c \sin A, \quad \sin b = \sin c \sin B \quad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B}{\sin a \sin B} \\ \cot a &= \frac{\cos A}{\sin b \sin A} \\ \cot c &= \frac{\cos b \cos A}{\sin b} \\ \cot c &= \frac{\cos a \cos B}{\sin a} \end{aligned}\right\} (52) \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \sin a \operatorname{tang} B \\ \operatorname{tang} a &= \sin b \operatorname{tang} A \\ \operatorname{tang} b &= \cos a \operatorname{tang} c \\ \operatorname{tang} a &= \cos B \operatorname{tang} c \end{aligned}\right.$$

et en ne prenant, parmi ces formules, que celles qui diffèrent essentiellement, on aura les six que voici :

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \cos c &= \cot A \cot b \\ \sin a &= \sin c \sin A \\ \operatorname{tang} a &= \sin b \operatorname{tang} A \\ \operatorname{tang} a &= \cos B \operatorname{tang} c \\ \cos A &= \sin B \cos a \end{aligned}$$

qui suffiront pour résoudre les triangles sphériques rectangles en C, et dans lesquels le côté c, opposé à l'angle droit, se nomme *hypothénuse*, aussi bien que dans les triangles rectilignes. On obtiendroit des formules analogues pour le cas où le triangle sphérique proposé auroit un de ses côtés égal au quadrans; mais nous ne nous y arrêterons pas.

55. Pour pouvoir appliquer commodément les logarithmes aux calculs des triangles sphériques, il faut transformer les formules des n°s 49-52, en d'autres dont le numérateur et le dénominateur soient décomposés en facteurs; et c'est ce qu'Euler a fait d'une manière aussi simple qu'élégante.

1°. De l'expression $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, comprise parmi celles de la première classe, n°. 49, on tire

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} \quad (11)$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

d'où il suit, à cause de $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \text{tang}\,\frac{1}{2}A^2$ (26),

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}A^2 = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)};$$

mais $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)$ (26);

donc $\text{tang}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}}$.

En opérant de même sur les autres expressions de la première classe, on parviendra à des résultats semblables.

2°. Prenant dans la seconde classe l'expression

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C};$$

on en déduit

$$1 - \cos a = -\frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C},$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \sin C},$$

d'où $\tan\frac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\cos(B-C)+\cos A}$;

mais $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$ (26):

donc $\tan\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C+A)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B-C+A)\cos\frac{1}{2}(B-C-A)}}$.

3°. Les expressions de la première classe donnent aussi

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos A$$
$$\cos b - \cos a\cos c = \sin a\sin c\cos B;$$

et divisant la première de ces équations par la seconde, en observant que, d'après les équations (A), on a

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

on trouvera

$$\frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos b - \cos a\cos c} = \frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}.$$

Si l'on ajoute ensuite l'unité à chaque membre de cette dernière, elle deviendra

$$1 + \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos b - \cos a\cos c} = 1 + \frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B};$$

et on la changera facilement en

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1-\cos c)}{\cos b - \cos a\cos c} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\cos B},$$

par la réduction des deux termes de chaque membre au même dénominateur.

En retranchant l'unité au lieu de l'ajouter, on aura

$$\frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos b - \cos a\cos c} - 1 = \frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B} - 1,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos a} = \frac{\sin (B - A)}{\sin A \cos B}.$$

Divisant cette équation par celle qu'on vient d'obtenir, et se rappelant que, d'après le tableau de la page 30,

$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \cot \tfrac{1}{2} c^2, \qquad \frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q}$$
$$= \tang \tfrac{1}{2}(q + p) \tang \tfrac{1}{2}(q - p),$$
$$\sin p = 2 \sin \tfrac{1}{2} p \cos \tfrac{1}{2} p,$$

on trouvera

$$\tang \tfrac{1}{2}(b - a) \tang \tfrac{1}{2}(b + a) \cot \tfrac{1}{2} c^2$$
$$= \frac{\sin (B - A)}{\sin (B + A)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B - A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}(B + A)};$$

mais en ajoutant et en retranchant successivement l'unité à chacun des membres de l'équation $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$, puis divisant les deux résultats l'un par l'autre, on parvient à l'équation

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$

qui peut être transformée ainsi :

$$\tang \tfrac{1}{2}(b - a) \cot \tfrac{1}{2}(b + a) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B + A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}(B - A)},$$

par les formules du tableau de la page 30. Multipliant entre elles, membre à membre, cette équation et la précédente, en observant que

$$\tang \tfrac{1}{2}(b + a) \cot \tfrac{1}{2}(b + a) = 1 \quad (9)$$

on obtiendra

$$(\tang \tfrac{1}{2}(b - a))^2 \cot \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{(\sin \frac{1}{2}(B - A))^2}{(\sin \frac{1}{2}(B + A))^2};$$

et extrayant la racine de chaque membre, il viendra

tang

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)};$$

divisant enfin la première par cette dernière,

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}.$$

En se rappelant que $\frac{1}{\cot p} = \text{tang}\, p$ (9), on déduira des deux équations ci-dessus les expressions

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a) = \text{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(b+a) = \text{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)},$$

qui feront connoître deux côtés d'un triangle spherique, dont on aura le troisième côté et les deux angles qu'il intercepte, puisqu'en désignant par b' et a', les valeurs des arcs $b+a$ et $b-a$, il en résulte

$$b = \tfrac{1}{2}(b'+a'), \qquad a = \tfrac{1}{2}(b'-a').$$

4°. En prenant dans la seconde classe de formules (50) les équations

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C\cos a$$
$$\cos B + \cos A\cos C = \sin A\sin C\cos b,$$

et divisant la première par la seconde, on trouvera

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos A\cos C} = \frac{\sin B\cos a}{\sin A\cos b} = \frac{\sin b\cos a}{\sin a\cos b},$$

Ajoutant et retranchant successivement l'unité à chacun des membres de celle-ci, puis divisant les résultats l'un par l'autre, on en conclura comme ci-dessus,

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}\text{tang}\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)},$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(B-A)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(B+A)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b+a)};$$

et comme l'équation $\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A}$ dont nous avons fait usage dans la transformation précédente, peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b-a)} = \tang\tfrac{1}{2}(B-A)\cot\tfrac{1}{2}(B+A),$$

en multipliant et en divisant par cette dernière celle que nous avons obtenue plus haut, nous trouverons enfin

$$\tang\tfrac{1}{2}(B-A) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(B+A) = \cot\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)},$$

formules qui remplaceront les précédentes lorsqu'on connoîtra deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.

56. En prenant toutes les variations dont les formules trouvées ci-dessus sont susceptibles, on aura

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$ (*)

(*) Pour tirer ces formules de leurs analogues du numéro précé-

$$\text{tang}\,\frac{b-a}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{tang}\,\frac{b+a}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{tang}\,\frac{c-b}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\text{tang}\,\frac{c+b}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\text{tang}\,\frac{a-c}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\text{tang}\,\frac{a+c}{2} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}b\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\text{tang}\,\frac{B-A}{2} = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\text{tang}\,\frac{B+A}{2} = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\text{tang}\,\frac{C-B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\text{tang}\,\frac{C+B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\text{tang}\,\frac{A-C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\text{tang}\,\frac{A+C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}$$

Des douze dernières formules on déduit les suivantes, qui servent à trouver le troisième angle ou le troisième côté d'un triangle dans lequel on connoît deux côtés et les angles opposés.

---

dent, il faut observer que $\alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$, et que $\sin(p-q)=-\sin(q-p)$, $\cos(p-q)=\cos(q-p)$.

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}c = \text{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}c = \text{tang}\tfrac{1}{2}(b+a)\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\cos\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}a = \text{tang}\tfrac{1}{2}(c-b)\frac{\sin\frac{1}{2}(C+B)}{\sin\frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}a = \text{tang}\tfrac{1}{2}(c+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B)}{\cos\frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}b = \text{tang}\tfrac{1}{2}(a-c)\frac{\sin\frac{1}{2}(A+C)}{\sin\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}b = \text{tang}\tfrac{1}{2}(a+c)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C)}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \text{tang}\tfrac{1}{2}(B-A)\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \text{tang}\tfrac{1}{2}(B+A)\frac{\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \text{tang}\tfrac{1}{2}(C-B)\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)}{\sin\frac{1}{2}(c-b)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \text{tang}\tfrac{1}{2}(C+B)\frac{\cos\frac{1}{2}(c+b)}{\cos\frac{1}{2}(c-b)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}B = \text{tang}\tfrac{1}{2}(A-C)\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\sin\frac{1}{2}(a-c)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}B = \text{tang}\tfrac{1}{2}(A+C)\frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)}{\cos\frac{1}{2}(a-c)}\ (*).$$

Si l'on joint à ces équations les équations (A), qui serviront dans le cas où l'on connoîtra deux côtés et l'un des angles opposés à ces côtés, ou bien deux angles et l'un des côtés opposés à ces angles, on aura tout ce qu'il faut pour résoudre un triangle sphérique. Ce qui précède peut donc être regardé comme formant un traité complet de trigonométrie sphérique. En combinant entre elles les

(*) Ces formules, et les précédentes, sont connues sous le nom *d'analogies de Neper*, parce qu'elles se déduisent des regles données par ce géomètre pour résoudre les triangles sphériques (*logarithmorum canonis descriptio*).

diverses formules que nous avons obtenues, on en pourroit déduire beaucoup d'autres d'un usage très-fréquent dans les calculs astronomiques. On doit, dans ce genre, au citoyen Delambre, des résultats très-élégans et très-nombreux, dont quelques-uns se trouvent dans la Trigonométrie de Cagnoli, d'autres dans les mémoires qu'il a présentés aux sociétés savantes.

Récapitulation des formules nécessaires pour résoudre un triangle sphérique quelconque.

57. En négligeant les variations que peut présenter un même cas, on ne trouve que les six suivans :

1°. *Connoissant les trois côtés* (a, b, c), *trouver un des angles* (A).

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)}}$$

2°. *Connoissant les trois angles* (A, B, C), *trouver un des côtés* (a).

$$\tan\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}}.$$

3°. *Connoissant deux côtés* (b, c), *et l'angle compris* (A), *trouver les autres angles* (B *et* C).

$$\tan\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A.$$

4°. *Connoissant deux angles* (B, C), *et le côté compris* (a), *trouver les autres côtés* (b *et* c).

$$\tan\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}\tan\tfrac{1}{2}a$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin\tfrac{1}{2}(B+C)}\tan\tfrac{1}{2}a.$$

5°. *Connoissant deux côtés* (a, c) *et un angle opposé* (C), *trouver l'autre angle opposé* (A).

$$\sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c}.$$

6°. *Connoissant deux angles* (A, C) *et un côté opposé* (c), *trouver l'autre côté opposé* (a).

$$\sin a = \frac{\sin c \sin A}{\sin C}$$

Observ. Aux deux premières formules rapportées ci-dessus, on substitue souvent celles-ci :

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}},$$

qui se rapportent à la solution du cas analogue de la trigonométrie rectiligne (37).

On parvient à ces formules en remarquant que

$$1 - \cos A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A^2, \qquad 1 - \cos a = 2 \sin \tfrac{1}{2} a^2;$$

et en réduisant par le moyen des expressions de $\cos p - \cos q$, et de $\cos p + \cos q$, les numérateurs des valeurs des quantités ci-dessus, obtenues dans le numéro 55.

Lorsque, dans les quatre premiers cas, les circonstances de la question laisseront douter si les arcs ou les angles cherchés valent plus ou moins du quadrans ou d'un angle droit, on levera la difficulté en recourant aux expressions des cosinus et des cotangentes des inconnues (53). Mais dans les deux derniers cas, il peut arriver que la question proposée soit susceptible de deux solutions, et l'on s'en assurera aisément en étudiant la manière de construire un angle trièdre, lorsqu'on connoît deux de ses faces et l'inclinaison de l'une d'elles sur

la troisième, ou bien lorsqu'on connoît les inclinaisons de deux faces sur la troisième, et l'angle des arêtes qui déterminent l'une des premières. Nous ne saurions entrer ici dans ces détails (*); mais en voici du moins les résultats.

1°. Le triangle sphérique ne peut exister que d'une seule manière avec les données a, c et C,

lorsque $C = 1^q$,

$C < 1^q$, $a < 1^q$, $c > a$
$C < 1^q$, $a > 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a < 1^q$, $c < 2^q - a$
$C > 1^q$, $a > 1^q$, $c < a$,

et il est susceptible de deux formes,

lorsque $C < 1^q$, $a < 1^q$, $c < a$
$C < 1^q$, $a > 1^q$, $c < 2^q - a$
$C > 1^q$, $a < 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a > 1^q$, $c > a$
$C <$ ou $> 1^q$, $a = 1^q$.

2°. Avec les données A, C et c, il ne peut avoir qu'une forme,

lorsque $c = 1^q$,

$c > 1^q$, $A > 1^q$, $C < A$
$c > 1^q$, $A < 1^q$, $C < 2^q - A$
$c < 1^q$, $A > 1^q$, $C > 2^q - A$
$c < 1^q$, $A < 1^q$, $C > A$,

et il en a deux quand

$c > 1^q$, $A > 1^q$, $C > A$
$c > 1^q$, $A < 1^q$, $C > 2^q - A$
$c < 1^q$, $A > 1^q$, $C < 2^q - A$
$c < 1^q$, $A < 1^q$, $C < A$
$c <$ ou $> 1^q$, $A = 1^q$.

(*) Il faut consulter le *Développement nouveau de la partie élémen-*

58. Pour donner une application de la trigonométrie sphérique, nous choisirons le problême suivant. *Connoissant un angle* MSN, fig. 18, *mesuré dans un plan incliné,* FIG. 18. *et les angles que font avec une verticale* SS'; *les côtés* SM *et* SN *du premier, trouver l'angle* M'S'N' *formé sur le plan* M'S'N', *horizontal ou perpendiculaire à* SS', *par les projections* M'S' *et* N'S' *des lignes* MS *et* NS.

Les trois lignes SS', SM et SN, déterminent un angle trièdre dont le point S est le sommet, dans lequel on connoît les trois angles plans MSN, MSS', NSS'; et puisque la droite SS' est perpendiculaire sur le plan $N'S'M'$, elle est aussi perpendiculaire sur chacune des lignes $M'S'$, $N'S'$, situées respectivement dans les plans $S'SN$, $S'SM$, et formant par conséquent entre elles un angle égal à celui qui mesure l'inclinaison de ces plans : le problême proposé revient donc à déterminer cette inclinaison. C'est ainsi qu'il se trouve résolu par des opérations graphiques, dans l'*Essai de géométrie sur les plans et les surfaces* (*Complément des Elémens de Géométrie*), n°. 41.

Mais on peut obtenir l'angle cherché en le considérant comme faisant partie du triangle sphérique BAC, formé par les cercles résultans des sections que les trois plans MSN, $S'SM$, $S'SN$, feroient dans une sphère dont le centre seroit en S, et dont le rayon seroit égal à celui des tables. On a dans ce triangle les côtés AB, AC, BC, qui sont les mesures respectives des angles donnés NSS', MSS', MSN; et l'angle demandé est précisément l'angle A : il se trouvera donc par la première règle du numéro précédent.

---

taire de Mathématiques de Bertrand, tom. II, *Trigonométrie*, section V.

CHAPITRE III.

De l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

59. L'APPLICATION de l'algèbre à la géométrie a pour but de faire servir les opérations algébriques à combiner ensemble plusieurs théorêmes de géométrie pour en déduire des conséquences. C'est ainsi que, dans les deux chapitres précédens, nous sommes parvenus aux principales formules de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique. Un théorême qui établit une relation entre plusieurs lignes d'une grandeur définie, peut toujours s'exprimer par une équation; et toutes les transformations qu'on opère sur cette équation, étant traduites en langage ordinaire, donnent des énoncés qui sont des conséquences du théorême duquel on est parti. Mais ce point de vue n'offre qu'une très-petite partie de ce que doit embrasser l'application de l'algèbre à la géométrie. Cette branche des mathématiques, considérée en général, comprend, non-seulement la recherche des propriétés de l'étendue par le moyen des procédés algébriques, mais elle doit montrer encore comment on peut représenter par ces propriétés tout ce que signifie une expression algébrique quelconque, ramener sans cesse les constructions des figures aux opérations de calcul, et revenir de celles-ci aux premières; c'est ce que montreront successivement les diverses questions traitées dans ce chapitre.

L'écriture algébrique, si utile pour exprimer les con-

ditions des problèmes qui regardent les nombres, n'est pas moins commode pour ceux qui ont rapport à la géométrie. Ces derniers peuvent se mettre en équation comme les premiers, dès qu'on est parvenu à trouver dans leur énoncé la relation des inconnues et des données; mais il faut pour cela appeler à son secours quelques-unes des propriétés de l'espèce de grandeurs que l'on considère.

60. Par exemple, puisqu'un triangle est déterminé par la connoissance de ses trois côtés, son aire doit l'être aussi par ce moyen, et l'on peut se proposer cette question :

Connoissant les trois côtés d'un triangle, trouver l'expression de son aire.

L'aire d'un triangle étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, on voit d'abord que la question se réduit à déterminer la hauteur, et en abaissant
FIG. 13. dans le triangle ABC, *fig.* 13, une perpendiculaire sur le côté AC, on forme deux triangles rectangles, qui fournissent des relations entre les côtés AB, BC, la perpendiculaire BD et les segmens AD et CD, faits par la perpendiculaire.

En effet, si on désigne par c, c', c'', les côtés AB, BC, AC, du triangle, par t le segment AD et par u la perpendiculaire BD, les triangles rectangles ABD, BDC donneront

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2, \qquad \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2.$$

On observera en outre que dans le premier triangle de la figure

$$DC = AC - AD, \quad = c'' - t,$$

et dans le second

$$DC = AD - AC, \quad = t - c''.$$

En mettant au lieu des lignes les lettres qui les repré-

sentent, et faisant attention que $(c'' - t)^2 = (t - c'')^2$, on formera, pour l'un et l'autre triangle, les équations

$$c^2 = u^2 + t^2, \qquad c'^2 = u^2 + (c'' - t)^2$$

qui, ne renfermant que deux inconnues t et u, en déterminent les valeurs.

Si on développe la seconde équation, et qu'on la retranche de la première, les termes u^2 et t^2 disparoîtront, et il viendra

$$c^2 - c'^2 = 2c''t - c''^2 \text{ (*)}$$

d'où on tirera

$$t = \frac{c^2 - c'^2 + c''^2}{2c''},$$

l'équation $c^2 = u^2 + t^2$, donnant

$$u = \pm\sqrt{c^2 - t^2}$$

on en déduira, par la substitution de la valeur de t, celle de

$$u = \pm\sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - c'^2 + c''^2)^2}{4c''^2}}$$

ou

$$u = \frac{\pm\sqrt{4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2}}{2c''}.$$

On peut, au moyen de cette formule, trouver la hauteur d'un triangle quand on connoît ses trois côtés; et comme l'expression de son aire se mesure par la moitié de sa base par sa hauteur, on déduira de ce qui précède l'aire d'un triangle, lorsqu'on connoîtra les trois côtés.

La lettre u désignant la perpendiculaire abaissée sur le côté c'' du triangle proposé, l'aire de ce triangle sera

---

(*) Je ferai remarquer que cette équation, mise sous la forme $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2c''t$, présente, par rapport au côté c' ou BC, le théorème du n°. 73 des Elémens de Géométrie.

$$\tfrac{1}{2}c''u = \tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c'')^2},$$

en mettant pour u la valeur trouvée ci-dessus.

Telle est l'expression de l'aire d'un triangle par ses trois côtés. En la considérant avec attention, il est facile de voir qu'elle n'est pas présentée ici sous la forme la plus élégante qu'on puisse lui donner, car elle ne paroît pas symétrique par rapport à chacun des côtés c, c', c'', ce qui pourtant devroit être, puisqu'en y changeant ces lettres les unes dans les autres, elle ne doit pas changer de valeur. Il suit évidemment de-là qu'elle peut être ramenée à ne contenir que des combinaisons semblables des lettres qu'elle renferme ; et l'on atteint ce but en observant que la quantité $4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)$, étant la différence de deux quarrés, se décompose dans les facteurs

$$2cc'' + c^2 + c''^2 - c'^2, \qquad 2cc'' - c^2 - c''^2 + c'^2,$$

qui reviennent à

$$(c + c'')^2 - c'^2, \qquad -(c - c'')^2 + c'^2,$$

et se décomposent eux-mêmes dans les quatre suivans :

$$c + c' + c'', \quad c + c'' - c', \quad c + c' - c'', \quad c' + c'' - c;$$

on aura donc

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(c + c' + c'')(c' + c'' - c)(c + c'' - c')(c + c' - c'')}.$$

Maintenant si l'on fait attention que

$$c' + c'' - c = (c + c' + c'') - 2c$$
$$c + c'' - c' = (c + c' + c'') - 2c'$$
$$c + c' - c'' = (c + c' + c'') - 2c''$$

et que l'on pose $c + c' + c'' = 2f$, on trouvera enfin que l'aire du triangle ABC est exprimée par

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2f \cdot 2(f - c) \cdot 2(f - c') \cdot 2(f - c'')},$$

et se réduit à

$$\sqrt{s(s-c)(s-c')(s-c'')},$$

formule aussi remarquable par l'utilité dont elle peut être pour évaluer l'aire d'une figure plane quelconque, que par son élégance : elle montre que l'*aire d'un triangle est exprimée par la racine quarrée du produit de la demi-somme des trois côtés, multipliée par les différences entre cette demi-somme et chacun des côtés.*

61. Dans la question précédente on s'est proposé de trouver un résultat numérique, quelquefois on cherche des lignes.

Qu'on se propose, par exemple, d'inscrire un quarré $DEFG$, dans un triangle ABC, *fig.* 19, il faudra FIG. 19. supposer la question résolue, et chercher ensuite entre les lignes données immédiatement par le triangle et le côté du quarré, une relation qui puisse s'exprimer algébriquement.

Pour cela on abaissera la perpendiculaire BH, que l'on regardera comme connue, puisqu'on sait la mener. Cela fait, les triangles semblables BAC et BDE, BAH et BDI, donnent

$$AB : BD :: AC : DE$$
$$AB : BD :: BH : BI$$

d'où il suit

$$AC : DE :: BH : BI,$$

et cette dernière proportion donne une relation entre BI et DE; or, BI dépend aussi de DE, car $BI = BH - IH$, et par la définition du quarré $IH = DE$: désignant donc les données par a et b, les données AB et BH, et par x l'inconnue IH ou DE, on aura

$$a : x :: b : b - x,$$

d'où

$$bx = ab - ax.$$

Cette équation du premier degré étant résolue, donne

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Lorsque les droites a et b sont rapportées à une commune mesure, ou exprimées en nombres, la formule ci-dessus donne, par des opérations arithmétiques, le nombre qui exprime la longueur de la droite IH, et ayant pris ce nombre sur la droite BH, on aura le point I, par lequel il faudra mener la droite DE.

Mais il n'est pas besoin pour déterminer le point I de recourir aux nombres, et les opérations indiquées dans l'expression de x, peuvent s'effectuer sur les lignes. On voit en effet que cette inconnue est le quatrième terme de la proportion suivante:

$$a+b : a :: b : x,$$

et que par conséquent tout se réduit à trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes

$$a+b,\ a \text{ et } b.$$

On regarde en général comme élégant de lier avec la figure qui contient les données du problème, les opérations qu'il faut effectuer pour en obtenir la solution. On peut en conséquence, dans la question précédente, employer l'angle droit CHB à la détermination de la quatrième proportionnelle à trouver. On portera donc sur HB prolongée,

$$1°.\ HL = a = AB, \qquad 2°.\ LK = b = BH;$$

tirant BK, puis menant IL parallèlement à CK, le point I, pour lequel on aura

$$HK : HL :: BH : IH,$$

appartiendra au côté DE du quarré $DEFG$.

62. On peut atteindre de la même manière à des questions d'un degré supérieur au premier.

On sait que diviser une ligne en moyenne et extrême

raison, c'est la partager de manière que l'un des segmens soit proportionnel entre la ligne entiere et l'autre segment; pour résoudre algébriquement ce problême, on désignera la ligne entière par a, le segment inconnu par x; l'autre segment sera $a-x$, et l'on aura

$$a : x :: x : a - x,$$

d'où l'on conclura

$$a^2 - ax = x^2;$$

en résolvant cette équation on en tirera

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}.$$

Les opérations indiquées dans cette solution peuvent s'effectuer sur les lignes au moyen du triangle rectangle; car $a^2 + \frac{1}{4}a^2$ étant la somme des quarres des lignes, a et $\frac{1}{2}a$, le radical $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ est l'hypothénuse AC, *fig.* 20, du triangle rectangle construit sur les côtés $AB = a$, $BC = \frac{1}{2}a$. Il ne s'agit, pour obtenir les deux valeurs de x, que de combiner, par addition et par soustraction, la ligne AC avec la ligne $BC = \frac{1}{2}a$, ce qui s'effectuera en portant BC de C en D sur AC, et de C en D' sur son prolongement; car on aura FIG. 20.

$AD = AC - DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, d'où $x = AD$

$AD' = AC + DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$, d'où $x = -AD'$

La droite AD étant rapportée en E sur AB par un arc de cercle, forme la solution donnée dans le n° 130 des *Elémens de géométrie;* l'autre valeur AD' ne résout pas le problême dans le sens précis de son énoncé, mais elle satisfait à une équation dans laquelle cet énoncé se trouve compris. En effet, de

$$AD' : AB :: AB : AD$$

ou de

$$x + a : a :: a : x,$$

on déduit encore, comme ci-dessus

$$x^2 + ax = a^2;$$

mais alors c'est la ligne AD' qui se trouve partagée en moyenne et extrême raison au point D, et le plus grand segment DD' est égal à la ligne donnée AB; à l'égard du signe —, qui affecte la valeur de AD', on verra plus bas, n° 70, quel est son objet.

63. Les exemples précédens suffisent pour montrer que la résolution algebrique des problêmes déterminés de geométrie, présente des circonstances analogues, à celle des problemes relatifs aux nombres. Il faut d'abord mettre la question en équation, tirer l'expression de l'inconnue, mais au lieu d'employer le calcul arithmétique pour évaluer cette expression, il faut effectuer sur les lignes connues des opérations graphiques, correspondantes à celles qui sont indiquées par les signes algébriques. Dans la question du n°. 61 dont l'équation n'étoit que du premier degré, c'est par les lignes proportionnelles qu'on a déterminé l'inconnue, et pour la question du numéro précédent, dont l'équation montoit au second degré, on a eu recours à la propriété du triangle rectangle. Ces déterminations sont ce qu'on appelle la *construction* des valeurs de l'inconnue, et je vais en exposer les principes qui sont communs à toutes les questions de ces deux degrés.

64. C'est une remarque générale, et qu'on aura souvent occasion de vérifier, que lorsqu'il n'entre que des lignes dans l'énoncé d'une question, et que la quantité cherchée est elle-même une ligne, son expression renferme toujours un facteur de plus dans le numérateur que dans le dénominateur, et chacune de ces quantités est composée de termes homogènes entre eux. La dernière expression de t, trouvée dans le numéro précédent

dent, remplit cette condition; son numérateur est le produit de deux facteurs, et son dénominateur n'en contient qu'un.

Il suit de là que lorsque l'expression d'une ligne quelconque ne contient point de radicaux, on peut, en représentant toutes les quantités qu'elle renferme par des lignes, obtenir la longueur de la première sans recourir aux nombres, et seulement en cherchant avec le compas des quatrièmes proportionnelles à des lignes données. Pour le prouver, il suffira de l'exemple suivant. Soit

$$t = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{gh + i^2};$$

cette expression, dont le numérateur est composé de termes contenant chacun trois facteurs, tandis que les termes du dénominateur n'en ont que deux, appartient, d'après la remarque ci-dessus, à une ligne. Si l'on fait

$$abc = kd^2, \qquad e^2 f = k' d^2,$$
$$gh = k'' d, \qquad i^2 = k''' d,$$

on aura

$$t = \frac{d^2(k + d - k')}{d(k'' + k''')} = \frac{d(k + d - k')}{k'' + k'''};$$

on obtiendra donc t en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes $k'' + k'''$, $k + d - k'$ et d, lorsque les lignes inconnues, représentées par k, k', k'', k''', seront déterminées. Or on a, par les équations posées ci-dessus,

$$k = \frac{abc}{d^2} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{d}, \quad k' = \frac{e^2 f}{d^2} = \frac{ef}{d} \times \frac{e}{d}$$
$$k'' = \frac{gh}{d}, \qquad k''' = \frac{i^2}{d};$$

on parvient à ces valeurs par les proportions suivantes:

$$d:a::b:\frac{ab}{d}, \qquad d:e::f:\frac{ef}{d}$$

$$d:c::\frac{ab}{d}:\frac{abc}{d^2}=k, \qquad d:e::\frac{ef}{d}:\frac{e^2f}{d^2}=k'$$

$$d:g::h:\frac{gh}{d}=k'', \qquad d:i::i:\frac{i^2}{d}=k''';$$

cherchant donc les quatrièmes termes de chacune par les lignes proportionnelles, on aura successivement les longueurs de lignes représentées par

$$\frac{ab}{d}, \quad \frac{abc}{d^2}, \quad \frac{ef}{d}, \quad \frac{e^2f}{d^2}, \quad \frac{gh}{d}, \quad \frac{i^2}{d},$$

qui donneront

$$k, k', k'' \text{ et } k''';$$

et avec celle-ci on trouvera t.

On reconnoît sans peine que l'esprit de la méthode dont nous venons de faire usage pour construire une expression algébrique, consiste à transformer le numérateur et le dénominateur de l'expression proposée, en produits d'un certain nombre de facteurs simples ou du premier degré, ce qui est toujours possible par les moyens que nous avons employés.

Il y a des cas où cette transformation peut s'effectuer immédiatement, sans qu'il soit besoin d'y introduire des indéterminées: tel est celui de l'expression

$$t=\frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2},$$

dont le numérateur équivaut à

$$(a+b)(a-b),$$

et dont le dénominateur peut s'écrire ainsi:

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}:$$

il vient alors

$$t=\frac{(a-b)\,(a+b)\,c}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2+b^2}},$$

ce qui s'obtient par les proportions

$$\sqrt{a^2+b^2}:a+b::c:\frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sqrt{a^2+b^2}:a-b::\frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}}:\frac{(a-b)\,(a+b)\,c}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Le radical employé dans ce calcul se construit facilement, car il exprime l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont a et b.

65. Le triangle rectangle et le cercle fournissent les moyens de construire la racine quarrée d'une quantité quelconque exprimée en lignes. L'usage du premier est évident, lorsque la quantité comprise sous le radical est la somme ou la différence de deux quarrés. En effet, on a dans ce cas, $\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2-b^2}$; l'une de ces expressions peut être regardée comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont a et b, et l'autre comme l'un des côtés adjacens à l'angle droit, dans un triangle de même nature, dont l'hypothénuse seroit a, et le troisième côté b.

On construira, par une suite de ces triangles, l'expression $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$: ayant obtenu d'abord $\sqrt{a^2+b^2}$, on représentera cette ligne par α, ce qui donnera

$$a^2+b^2=\alpha^2,$$

et la quantité proposée deviendra

$$\sqrt{\alpha^2+c^2+d^2};$$

on construira le radical $\sqrt{\alpha^2+c^2}$ comme le précédent;

et nommant β le résultat de cette opération, on aura

$$a^2 + c^2 = \beta^2 :$$

il ne restera plus qu'à trouver $\sqrt{\beta^2 + d^2}$, ce qui se fera en prenant l'hypothénuse du triangle rectangle dont les côtés sont β et d. Il est facile d'étendre ce procédé au cas où le radical à construire contiendroit un nombre quelconque de quarrés.

66. Passons maintenant à l'emploi du cercle dans l'extraction des racines quarrées. On sait que la perpendiculaire élevée sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce diamètre (*Géom.* 128) ; on ob-
FIG. 21. tiendra donc $\sqrt{ab}$ en prenant, *fig.* 21, $AP = a$, $BP = b$; et sur la somme AB de ces deux lignes, comme diamètre, décrivant un cercle, la perpendiculaire PM, elevée sur le point P, étant moyenne proportionnelle entre AP et BP, sera $\sqrt{ab}$.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes quelconques a et b, en prenant la plus grande des deux, pour le diamètre AB du cercle, et portant l'autre de A en P; élevant ensuite l'ordonnée PM, et tirant la corde AM, on aura la moyenne proportionnelle demandée (*Géom.* 129).

A l'aide de ces méthodes, on construira tous les radicaux du second degré, quelle que soit la quantité qu'ils renferment. Soit pour exemple

$$\sqrt{a^2 + bc - \frac{def}{g}} :$$

on fera $bc = ak$, $\frac{def}{g} = ak'$; l'expression proposée deviendra

$$\sqrt{a^2 + ak - ak'} = \sqrt{(a + k - k')\,a},$$

et pour l'obtenir, il suffira de prendre une moyenne proportionnelle entre deux lignes respectivement égales à $a + k - k'$ et a : il est d'ailleurs évident que les quantités k et k' se détermineront par les lignes proportionnelles, d'après ce qui a été dit, n° 64, puisque les équations dont elles dépendent donnent

$$k = \frac{bc}{a}, \qquad k' = \frac{def}{ag},$$

et conduisent par conséquent à ces proportions :

$$a : b :: c : k,$$

$$a : d :: e : \frac{de}{a}, \qquad g : f :: \frac{de}{a} : \frac{def}{ag} = k'.$$

67. La quantité que l'on se propose de construire pourroit ne pas être homogène ; mais cela n'arrivera que lorsqu'on aura fait quelque ligne égale à l'unité, ou que l'on aura représenté un nombre par une lettre, ou une ligne par un nombre ; et les méthodes indiquées ci-dessus ne seront pas arrêtées par cette circonstance, pourvu qu'on fasse reparoître, dans tous les termes où elle devoit se trouver, et avec des exposans convenables, la ligne prise pour unité.

Si l'on avoit $\sqrt{a + \frac{bc}{d^3}}$ et que l'on sût par l'énoncé de la question qui auroit conduit à cette expression, qu'elle doit appartenir à une ligne, on verroit que chacun des termes compris sous le radical devroit être du second degré, et que par conséquent en désignant l'unité par n, il faudroit écrire an au lieu de a, et $\frac{bcn^3}{d^3}$ au lieu de $\frac{bc}{d^3}$, ce qui ne change rien à la grandeur absolue de ces quantités, puisque $n = 1 = n^3$, et en général $n^m = 1$, quelle que soit m. On auroit de cette manière

$$\sqrt{an+\frac{bcn^3}{d^3}}=\sqrt{n\left(a+\frac{bcn^2}{d^3}\right)},$$

qui se construiroit facilement.

Nous observerons que, d'après ce qui précède, on pourroit extraire, par une opération graphique, la racine quarrée d'un nombre quelconque, en prenant une moyenne proportionnelle entre deux lignes, dont l'une représenteroit l'unité, et l'autre auroit avec celle-ci le rapport marqué par le nombre proposé. $\sqrt{\frac{7}{5}}$, par exemple, s'obtiendroit en prenant une moyenne proportionnelle entre deux lignes, dont une seroit les $\frac{7}{5}$ de l'autre, puisque $\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{1\times\frac{7}{5}}$.

68. Rien n'est plus facile maintenant que de construire l'expression des racines de l'équation du second degré $x^2-ax=b^2$, qui peut représenter toutes celles de ce degré. En effet, en tirant la valeur de x, on a

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+b^2};$$

il ne s'agit que de construire le radical $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ (65), et de prendre ensuite la somme et la différence du résultat et de la ligne $\frac{1}{2}a$, pour obtenir la grandeur de chacune des racines de la propoées.

Si cette équation étoit de la forme $x^2-ax=-b^2$, on auroit,

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b^2};$$

sa construction, dans ce cas, ne différeroit de celle du précédent, qu'en ce que le radical seroit exprimé par l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, au lieu de l'être par l'hypothénuse, et que ce triangle cesseroit d'exister si l'on avoit $\frac{1}{2}a<b$, parce qu'alors ayant pris sur l'un des côtés d'un angle droit ABC, fig. 22, une grandeur $AB=b$, le cercle DE, décrit du point A

FIG. 22.

comme centre, avec un rayon qui seroit moindre que AB, n'atteindroit pas l'autre côté BC. Cette circonstance s'accorde avec la théorie des équations du second degré, qui donne des racines imaginaires pour le cas dont il s'agit.

On pourra appliquer ce qui précède à la question suivante : *Etant donnée la somme ou la différence des deux côtés contigus d'un rectangle et son aire, construire ce rectangle.*

En effet, soient b^2 la surface du rectangle demandé, a la somme ou la différence de ses côtés contigus, et x l'un d'eux ; l'autre sera exprimé par $a - x$ dans le premier cas, et par $a + x$ dans le second ; la surface sera $(a-x)x$ pour le premier cas, et $(a+x)x$ pour le second ; en sorte qu'on aura ces deux équations :

$$ax - x^2 = b^2, \qquad ax + x^2 = b^2,$$

lesquelles, étant résolues, donneront des valeurs de x constructibles par la méthode précédente.

69. Il n'est pas nécessaire de résoudre les équations du second degré pour en trouver graphiquement les racines ; on les obtient immédiatement par les propriétés des lignes proportionnelles considérées dans le cercle.

L'équation $x^2 + ax = b^2$ étant mise sous la forme

$$x(x+a) = b^2,$$

se rapporte à la propriété des sécantes et des tangentes qui partent d'un même point (*Géom.* 126) ; car si on décrit, *fig.* 23, sur un rayon $BC = \frac{1}{2}a$ un cercle, qu'on lui FIG. 23.
mène une tangente AB dont la longueur soit b, et que par les points A et C on tire une sécante AC, en nommant x la ligne AD, on aura évidemment

$$AD' = AD + DD' = AD + 2BC = x + a,$$

et la propriété citée plus haut, donnant $AD \times AD' = \overline{AB}^2$, il en résultera

$$x(x+a) = b^2,$$

ce qui est l'équation proposée.

Si l'on avoit $x^2 - ax = b^2$, il faudroit faire $x = AD'$ on auroit alors

$$AD' = x - a, \text{ et } x(x-a) = b^2.$$

La construction présente, n'étant sujette à aucune exception, nous montre que tant que b^2 sera positif dans le second membre, en même temps que x^2 l'est dans le premier, les racines de l'équation proposée seront toujours réelles.

L'équation $x^2 - ax = -b^2$ se change en $ax - x^2 = b^2$, et peut alors s'écrire ainsi

$$x(a-x) = b^2.$$

Sous cette dernière forme elle se rapporte à la propriété des cordes qui se coupent dans le cercle; car si l'on décrit sur un diamètre $AB = a$, *fig.* 24, un cercle, qu'on élève au point A une perpendiculaire $AC = b$, qu'on tire ensuite CM parallèle à AB, et que par les points M et M', où CM rencontre le cercle, on abaisse sur AB, les perpendiculaires PM et $P'M'$, on aura

FIG. 24.

$$AP \times BP = AP(AB - AP) = \overline{PM}^2,$$

ou

$$AP(a - AP) = b^2,$$

puis

$$AP' \times BP' = AP'(AB - AP') = \overline{P'M'}^2,$$

ou

$$AP'(a - AP') = b^2:$$

d'où on voit qu'en prenant successivement pour x les droites AP et AP', on retombera sur l'équation proposée

$$ax - x^2 = b^2,$$

et que par conséquent les droites AP et AP', obtenues

par les procédés ci-dessus, sont les valeurs de l'inconnue x.

Il est visible que quand AC surpassera le rayon du cercle ou $\frac{1}{2}a$, la droite CM ne rencontrera plus le cercle et ne fournira par conséquent aucune détermination, mais alors les racines de l'équation proposée seront imaginaires.

Les racines de l'équation $x^2 + ax = -b^2$ ne diffèrent de celles de l'équation $x^2 - ax = -b^2$, que parce qu'elles sont affectées du signe —; mais leur grandeur s'obtiendra toujours par la construction que nous venons d'indiquer.

70. Dans l'application de l'algèbre à la géométrie le signe — s'interprête en général comme à l'égard des nombres, en renversant d'une certaine manière l'énoncé de la question, ou en prenant les lignes qui en sont affectées, dans un sens contraire à celui où on les avoit supposées d'abord.

Avant d'aller plus loin je dois rappeler que les quantités négatives tirent leur origine des soustractions, qui ne peuvent s'effectuer dans l'ordre où elles sont indiquées, parce que la quantité à retrancher se trouve plus grande que celle dont on doit la retrancher. On reconnoît par cette circonstance qu'il y avoit erreur dans l'énoncé de la question, ou au moins dans son application au cas particulier que l'on a eu en vue; et en redressant cette erreur, c'est-à-dire en modifiant l'énoncé de manière à rendre possible la soustraction qui n'a pu s'exécuter, on parvient à un résultat positif. Mais pour certaines questions, pour toutes celles qui mènent à des équations du premier degré, par exemple, on n'a pas besoin de prendre cette peine; le signe du résultat indique lui-même le renversement dont l'énoncé est susceptible; et les valeurs négatives, employées conformément aux règles établies pour effectuer les opérations sur les quantités affectées du

signe —, satisfont aussi bien aux questions que celles qui sont positives : c'est pour cela que les Géomètres récens ont changé la dénomination de *racines fausses*, qu'on donnoit autrefois aux racines négatives des équations.

C'est donc aussi par la soustraction que l'on doit expliquer, sur les figures géométriques, les valeurs négatives que l'algèbre donne à certaines lignes ; et pour soustraire une ligne d'une autre, il suffit de porter la première sur la seconde, à partir de l'une des extrémités de celle-ci : mais il y a, sur cette opération graphique, quelques observations à faire qui tiennent à la manière dont les lignes se décrivent.

FIG. 25. Soit d'abord CD, *fig.* 25, la ligne à soustraire de AB ; comme la première est moindre que la seconde, en portant cette première de B en c, leur différence Ac sera placée à la droite du point A ; mais si l'on avoit à retrancher $C'D'$, plus grande que AB, et qu'on portât toujours sur AB, à partir de la même extrémité B, la ligne à retrancher, la différence des deux droites proposées seroit marquée en Ac', sur le prolongement de AB, et seroit placée à gauche du point A, c'est-à-dire d'un côté opposé au résultat Ac de la première opération : c'est à ce changement de situation que répond le signe —.

Il sembleroit au premier coup-d'œil que l'on devroit effectuer la soustraction indiquée sur les lignes $C'D'$ et AB, en portant la plus petite sur la plus grande, car c'est ce que l'on fait sur les nombres, lorsqu'on ôte le plus petit du plus grand ; mais il faut observer, à l'égard des lignes, qu'elles sont en général employées à marquer des distances à un certain point auquel on en apporte d'autres, et qu'on regarde comme fixe ; elles prennent leur accroissement par l'extrémité opposée à ce point, et alors la soustraction, qui, par sa nature, est inverse de

l'addition de laquelle résultent en général les accroissemens, doit s'opérer aussi en sens inverse de celle-là, et par conséquent en allant vers le côté où les lignes diminuent. De-là vient que si le point A sur la droite AB est le point fixe dont nous parlons, la soustraction de CD ou de $C'D'$ doit s'opérer à partir du point B. La continuité des lignes et la possibilité de les prolonger indéfiniment dans les deux sens, donne à leur égard le moyen d'opérer, comme on vient de le voir, la soustraction de la même manière, quoique la quantité à soustraire soit devenue la plus grande des deux. Voici un problême fort simple qui confirmera ce qu'on vient de lire.

71. *Mener dans un triangle donné* ABC; fig. 26, *parallèlement au côté* AC, *une ligne* DE *qui soit égale à une ligne donnée* MN. FIG. 26.

Les côtés du triangle étant donnés, je ferai

$$AB = a, \quad AC = b, \quad MN = c;$$

et je prendrai pour inconnue la distance AD, parce que la position d'une ligne parallèle à une ligne donnée, est déterminée par un seul de ses points. En faisant $AD = x$, j'aurai $BD = a - x$, et les triangles semblables BAC et BDE donneront

$$AB : AC :: BD : DE$$

ou

$$a : b :: a - x : c;$$

donc

$$ab - ax = ac,$$

$$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a(b-c)}{b}.$$

La valeur de x se construit (64), en retranchant de $AC = b$, la droite $CF = c$, puis tirant FD parallèle à CB; car la similitude des triangles ABC, AFD, fournit cette proportion:

$$AC : AB :: AF : AD$$

$$b : a :: b - c : x = \frac{a(b-c)}{b}.$$

Si la ligne MN devenoit plus grande que AC, elle ne pourroit plus trouver place dans l'intérieur du triangle ABC, il faudroit prolonger les côtés AB et AC; mais alors le point D passeroit en D' de l'autre côté du point A, et c'est précisément ce qu'indiquent le calcul et la construction.

En effet, si l'on a $M'N' > AC$, il en résultera $c > b$, la quantité $b - c$ sera par conséquent négative; mais en faisant la soustraction des lignes, comme il a été indiqué dans le numéro précédent, le point F passera en F', et la ligne $F'D'$, menée par le point F' parallèlement à BC, ne pourra rencontrer que le prolongement du côté AB en D'.

72. En général, toutes les fois qu'il s'agit de distances rapportées à un point fixe et comptées sur une même ligne, ou sur des lignes parallèles, celles qui sont affectées du signe — doivent se prendre dans un sens opposé à celles qui sont affectées du signe +.

En effet, si l'on considère la situation respective de deux points dont les distances à une droite quelconque, soient exprimées par $a + b$ et $a - c$, il est évident que la distance mutuelle de ces points est $b + c$, puisque $a + b - (a - c) = b + c$; pour les placer de cette manière par rapport à une droite quelconque $A'B'$,

FIG 27 *fig.* 27, il faut tirer d'abord, soit d'un côté, soit de l'autre de cette ligne, à une distance $AA' = a$, une parallèle AB, puis mener ensuite deux autres lignes parallèles à celles-ci, l'une QM, en dehors des premières et à une distance $AQ = b$, l'autre $Q'M'$, en dedans et à une distance $AQ' = c$. Par ce moyen, tous les points, tels que M et M', placés aux rencontres des dernières parallèles

et d'une perpendiculaire à la ligne $A'B'$, auront entre eux la distance exigée, et se trouveront dans une situation opposée par rapport à la parallèle intermédiaire AB, de laquelle leurs éloignemens respectifs sont marqués par $+b$ et $-c$. Il est facile de voir qu'ils seroient tous deux du même côté de AB, si leurs distances à la ligne $A'B'$ étoient exprimées par $a+b$ et $a+c$, parce qu'alors leur distance mutuelle seroit $b-c$.

C'est ainsi que les sinus, qui sont les distances des extrémités des arcs au diamètre AA' *fig.* 10, et les cosinus qui sont les distances au diamètre BB', changent de signe en passant d'un côté à l'autre de ces diamètres (23). La tangente suit la même loi à l'égard du diamètre AA', et par la même raison. FIG. 10.

73. Ces considérations ne s'appliquent pas aussi immédiatement à la sécante, parce que sa direction change à chaque instant : cependant elle n'en a pas moins un signe propre à ses diverses situations, et qui se tire de son expression analytique $\sec a = \frac{R^2}{\cos a}$; mais ce n'est, en général, que par rapport aux lignes qui conservent la même direction, que le changement de signe répond toujours immédiatement au changement de côté (*).

Les droites AD et AD', qui représentent les racines de l'équation du second degré $x^2 + ax = a^2$ (63), quoique appartenantes à des valeurs de signes différens, ne sont

(*) On peut, ce me semble, donner une explication assez naturelle des changemens de signe de la sécante, en observant que cette ligne prend réellement une situation opposée, lorsqu'elle atteint la tangente par l'extrémité opposée à celle où elle y arrivoit d'abord. En effet, dans les arcs BA' et $A'B'$ pour lesquels l'expression analytique de la sécante est négative, ce n'est plus le rayon CM qui atteint la tangente NN', mais le rayon opposé.

pas opposées ; mais s'il s'agissoit de les appliquer à la solution d'un problême où elles seroient considérées comme des distances à un point fixe, mesurées sur une ligne de direction constante, il faudroit les porter de différens côtés de ce point, d'après la règle du n° 72.

En effet, le problême du n° 62, par exemple, peut être énoncé ainsi :

FIG. 20. *Trouver sur la droite* AB = a, fig. 20, *un point* E, *tel que la distance* AE *au point* A, *soit moyenne proportionnelle entre la distance à l'autre extrémité* B *et la ligne entière* AB. Les deux valeurs de l'inconnue étant alors AD et AD', la dernière, qui se trouve affectée du signe —, doit être portée en AE', au-delà du point A, par rapport au point B. Cette conclusion est facile à vérifier ; car on a

$$AE' = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2},$$
$$BE' = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2},$$

d'où il suit

$$AB \times BE' = a\left(\tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}\right)$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2}a - \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}\right)^2 = \overline{AE'}^2.$$

Le problême suivant est encore très-propre à faire connoître comment il faut interpréter les diverses solutions qu'offre une même équation.

74. *D'un point* E, fig. 28, *placé comme on voudra, par*
FIG. 28. *rapport à deux droites* AB *et* AC, *perpendiculaires entre elles, mener une droite de manière que la partie* D'F' *de cette droite, interceptée entre les deux lignes proposées, soit d'une grandeur donnée* m.

Pour connoître la position de la ligne $D'F'$, déjà assujettie à passer par le point donné E, il ne faut qu'en déterminer un autre point qu'on peut choisir comme on vou-

dra; je prendrai pour cela AD', et puisque le point E est donné, je supposerai connues les lignes GE et HE, menées de ce point parallèlement aux lignes AB et AC: je ferai en conséquence

$$GE=a, \qquad HE=b, \qquad AD'=y.$$

Cela posé, les triangles semblables GED' et $F'AD'$ donnent

$$GD' : GE :: AD' : AF';$$

mais $GD'=AD'-AG=AD'-HE=y-b$; donc

$$y-b : a :: y : AF' = \frac{ay}{y-b}.$$

Le triangle $AD'F'$ étant rectangle en A, fournit l'équation

$$\overline{AD'}^2+\overline{AF'}^2=\overline{DF'}^2,$$

qui, d'après les calculs et les constructions précédentes, devient

$$y^2+\frac{a^2y^2}{(y-b)^2}=m^2,$$

et

$$y^4-2by^3+(b^2+a^2-m^2)y^2+2bm^2y-b^2m^2=0 \quad (1)$$

lorsqu'elle est développée et ordonnée.

Cette équation monte au quatrième degré, parce que la question proposée a, en général, quatre solutions. On voit en effet par l'inspection de la figure que l'on peut remplir de quatre manières différentes les conditions du problème proposé, savoir :

Par les deux lignes $D'F'$ et $D''F''$, menées dans l'angle droit BAC, où se trouve placé le point E;

Puis par les deux lignes $D'''F'''$ et $D''''F''''$, menées dans les angles CAB' et BAC', adjacens à l'angle BAC.

Il n'est pas difficile de voir que les solutions de l'angle

BAC peuvent devenir impossibles, lorsque la grandeur m est au-dessous d'une certaine limite qui dépend de la position du point E, à l'égard des droites AB et AC; mais que les deux autres solutions seront toujours réelles.

Il n'est pas moins évident que la question se simplifieroit, sans perdre aucune de ses solutions, si on prenoit le point E à égale distance des droites AC et AB; car il suffiroit alors de connoître une de celles de l'angle BAC et une des deux autres pour les obtenir toutes les quatre.

Si on avoit $D'F'$, par exemple, on en concluroit $D''F''$ en prenant $AF''=AD'$, à cause que le point E seroit semblablement placé à l'égard des deux droites AC et AB; on déduiroit par la même raison $D'''F'''$ de $D''F''$, en prenant $AF'''=AD''$.

D'après cette remarque je ferai $GE=HE$, ou $a=b$; et l'équation proposée deviendra

$$y^4-2ay^3+2a^2y^2-m^2(y^2-2ay+a^2)=0\ldots(2).$$

On ne voit pas encore comment cette équation peut être résolue plus facilement que la précédente, mais la relation observée ci-dessus entre les diverses solutions, va mettre la chose en évidence.

Les triangles $D'AF'$ et $D''AF''$, $D'''AF'''$ et $D''''AF''''$, étant égaux, il s'ensuit que les angles $D'F'A$ et $D''F''A$, $D'''F'''A$ et $D''''F''''A$, sont complémens l'un de l'autre, et que par conséquent, dès que l'on connoîtra les angles $D'FA$, $D'''F'''A$, on aura les deux autres, et toutes les solutions de la question seront connues; mais puisqu'on n'a de cette manière que deux solutions à trouver immédiatement, il est avantageux de déterminer l'angle que la droite, comprise entre les lignes AB et AC, doit faire avec l'une de ces lignes, avec AB, par exemple.

En

En prenant pour inconnue la tangente de cet angle, le triangle $D'EG$ montre que

$$\text{tang } D'F'A = \text{tang } D'EG = \frac{D'G}{GE} = \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}.$$

Si on fait $\frac{y-a}{a} = z$, on aura

$$y = az + a,$$

et substituant cette valeur dans l'équation (2), il viendra, après les réductions,

$$a^4z^4 + 2a^4z^3 + (2a^4 - a^2m^2)z^2 + 2a^4z + a^4 = 0,$$

$$\text{ou } z^4 + 2z^3 + \frac{(2a^2 - m^2)}{a^2}z^2 + 2z + 1 = 0. \quad (3)$$

Il est maintenant visible que si la quantité z' satisfait à cette équation, la quantité $\frac{1}{z'}$ y satisfera pareillement (*); en l'écrivant ainsi :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2}z^2,$$

on reconnoît sans peine qu'en ajoutant z^2 à chaque membre, le premier devient un quarré parfait,

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 + z^2 = (z^2 + z + 1)^2 :$$

on a donc

$$(z^2 + z + 1)^2 = \frac{m^2}{a^2}z^2 + z^2,$$

$$\text{d'où } \quad z^2 + z + 1 = \pm z\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + 1},$$

ce qui revient à

(*) Cette équation est de celles qu'on nomme *réciproques*. On trouve dans le *Complément des Elémens d'Algèbre* (41) la manière de les abaisser autant qu'il est possible ; et par la transformation indiquée dans l'endroit cité, la proposée se réduit sur-le-champ au second degré.

savoir les deux premières; les deux autres deviendront imaginaires lorsqu'on aura $2a^2 + 2a\sqrt{m^2+a^2} > m^2$, puisque dans ce cas la quantité soumise au radical sera négative; mais avant de parvenir à ce terme, les mêmes valeurs deviendront égales si $2a^2 + 2a\sqrt{m^2+a^2} = m^2$.

Pour reconnoître ce cas, il faut mettre l'équation précédente sous la forme $2a^2 - m^2 = -2a\sqrt{m^2+a^2}$, et faisant évanouir les radicaux, il vient

$$-4a^2m^2 + m^4 = 4a^2m^2;$$

divisant par m^2, on arrive à un résultat qui donne

$$m^2 = 8a^2, \text{ ou } m = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

ce qui prouve qu'on ne pourra mener dans l'angle BAC, par le point E, aucune droite moindre que $2a\sqrt{2}$.

Les valeurs de z', z'', z''', z'''', se changent, d'après celle-ci, en

$$z' = 2 + \sqrt{3}, \quad z'' = 2 - \sqrt{3}, \quad z''' = z'''' = -1.$$

La construction des expressions de z', z'', z''', z'''', ne dépend que de celle des radicaux

$$\sqrt{a^2+m^2}, \quad \sqrt{-2a^2+m^2+2a\sqrt{a^2+m^2}}$$
$$\sqrt{-2a^2+m^2-2a\sqrt{a^2+m^2}}.$$

Le premier s'obtient facilement, puisqu'il exprime l'hypothénuse du triangle rectangle dont les côtés sont a et m; à l'égard des deux derniers, il faut observer qu'ils peuvent se changer respectivement en

$$\sqrt{(a+\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2}, \sqrt{(a-\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2},$$

et que par conséquent l'un est le côté de l'angle droit du triangle rectangle, dont l'hypothénuse et le troisième côté sont $a + \sqrt{a^2+m^2}$, et $2a$, et l'autre celui du

triangle rectangle dont l'hypothénuse et le troisième côté sont $a - \sqrt{a^2 + m^2}$ et $2a$. Faisant donc

$$\sqrt{a^2+m^2} = n, \quad \sqrt{(a+\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2} = p$$
$$\sqrt{(a-\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2} = q,$$

il viendra

$$z' = \frac{a+n+p}{2a}, \quad z'' = \frac{a+n-p}{2a}$$
$$z''' = \frac{a-n+q}{2a}, \quad z'''' = \frac{a-n-q}{2a}.$$

Connoissant les tangentes z', z'', z''' et z'''', on en conclura

$$D'G = GE \text{ tang } D'EG = GE \text{ tang } D'F'A = az'$$
$$D''G = GE \text{ tang } D''EG = GE \text{ tang } D''F''A = az''$$
$$D'''G = GE \text{ tang } D'''EG = GE \text{ tang } D'''F'''A = az'''$$
$$D''''G = GE \text{ tang } D''''EG = GE \text{ tang } D''''F''''A = az'''',$$

d'où il suit

$$D'G = \frac{a+n+p}{2}, \quad D''G = \frac{a+n-p}{2},$$
$$D'''G = \frac{a-n+q}{2}, \quad D''''G = \frac{a-n-q}{2};$$

et lorsqu'on aura les longueurs des quatre droites ci-dessus, les points D', D'', D''', D'''' seront bientôt trouvés (*).

75. Si, au lieu de prendre pour inconnue l'angle que doit faire avec l'axe des abscisses AB, la droite deman-

(*) Si on compare l'analyse que nous venons de faire des diverses circonstances de la question ci-dessus, avec celle que l'on trouve dans l'algèbre de Bézout (3e vol. du *Cours à l'usage de la marine*, pag. 554), on verra combien cette dernière est incomplète et fautive; elle n'indique que les deux solutions représentées par les lignes $D'F'$ et $D'''F'''$.

dée, nous eussions cherché à déterminer la distance entre le point donné E et le point K pris sur le milieu de la ligne $D'F'$; en faisant $EK = x$, et posant, pour abréger, $F'K = D'K = \frac{m}{2} = l$, nous aurions eu

$$D'E = D'K + EK = l + x,\quad F'E = F'K - FK = l - x,$$

$$F'H = \sqrt{\overline{EF'}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{(l-x)^2 - a^2};$$

et les triangles semblables $D'GE$, EHF', nous auroient donné

$$D'E : EG :: EF' : F'H,$$

ce qui revient à

$$l + x : a :: l - x : \sqrt{(l-x)^2 - a^2},$$

d'où nous aurions déduit l'équation

$$a(l-x) = (l+x)\sqrt{(l-x)^2 - a^2},$$

qui, par l'élévation au quarré et le développement, seroit devenue

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)x^2 + l^4 - 2a^2 l^2 = 0,$$

et pouvant la résoudre comme celles du second degré, on en auroit tiré d'abord

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2 l^2},$$

puis

$$x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2 l^2}} = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}},$$

expressions faciles à construire d'après ce qu'on a vu dans les numéros 65 et 66.

Cette solution, bien remarquable par son élégance, est tirée de l'*Arithmétique universelle de Newton*, qui l'a donnée ponr montrer comment un heureux choix d'inconnues simplifie la solution d'un problême. Celui qu'il a fait, dans la question qui nons occupe, lui a sans doute été suggéré par la considération que la distance EK ne

peut avoir que deux grandeurs différentes, l'une relative aux deux solutions $D'F'$ et $D''F''$, et l'autre aux solutions $D'''F'''$ et $D''''F''''$, et que par conséquent ses quatre valeurs doivent être égales deux à deux, et ne peuvent différer que par le signe. Nous conclurons de là que, pour se déterminer dans le choix des inconnues, il faut chercher celle qui, dans les diverses circonstances que peut offrir la question, subit le moins de changemens.

76. Le petit nombre de questions résolues précédemment, suffit pour montrer comment l'algèbre peut s'appliquer à la solution des problêmes. On a dû reconnoître par ces exemples, que les circonstances relatives à la situation des lignes, peuvent toujours être déduites de la considération des triangles, et, moyennant les propriétés de ces figures, s'exprimer algébriquement. L'art de former les triangles dont il s'agit, et qui résultent, soit explicitement soit implicitement, des conditions du problême proposé, ne peut, comme la facilité de mettre les problêmes numériques, s'acquérir que par l'habitude (*).

Les diverses expressions construites dans ce qui précède, ne se rapportent qu'à des lignes, parce que les problêmes qui les ont amenées n'ont pour but que la détermination des lignes; et c'est ce qui arrive le plus souvent, puisque la détermination des figures se réduit toujours à celle de leurs dimensions. Cependant il peut se présenter quelque cas où l'on cherche immédiatement une

(*) *L'Arithmétique universelle de Newton* contient une collection de problêmes, aussi précieuse par l'élégance des solutions que par la variété des énoncés; le Traité de la *Corrélation des figures de géométrie de Carnot*, en renferme de très-intéressans, et qui conduisent à des propriétés de l'étendue très-remarquables. La lecture de ces ouvrages, et de ceux de Thomas Simpson, sera très-utile aux personnes qui voudront s'exercer à la résolution des questions.

aire ou un *volume;* l'expression à laquelle on arrive doit, si elle est homogène, avoir dans le premier cas, à chaque terme de son numérateur, deux facteurs de plus qu'à ceux de son dénominateur, et trois dans le second cas.

Par exemple, l'expression

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad}$$

peut désigner une aire, et l'expression

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4}$$

un volume.

Construire ces expressions c'est faire un rectangle dont l'aire soit équivalente à la première, et un parallélépipède rectangle dont le volume soit équivalent à la seconde, et pour cela on prépare, par l'artifice analytique du n° 64, la première formule de manière qu'elle se déduise à un produit de deux facteurs, la seconde de manière qu'elle devienne un produit de trois facteurs.

En effet, si on prend

$$ab^2c = m^3k, \quad a^3d = m^3k', \quad d^4 = m^3k''$$
$$c^2 = mk''', \quad ad = mk'''',$$

La quantité m demeurera abstraite, les quantités k, k', k'', k''', k'''', se détermineront par les lignes proportionnelles, et on aura

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{m^3k - m^3k' + m^3k''}{mk''' + mk''''}$$
$$= \frac{m^2(k - k' + k'')}{k''' + k''''} = m \times \frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''},$$

résultat qui peut être regardé comme l'aire d'un rectangle dont la base seroit m, et dont la hauteur seroit la ligne représentée par la formule

$$\frac{m\,(k-k'+k'')}{k'''+k''''}.$$

Puisqu'on est maître de prendre à volonté la ligne m, on peut la faire égale à l'une des quantités employées dans l'expression à construire, ou bien à l'unité, si l'on en a choisi une. L'exemple ci-dessus se simplifie lorsqu'on prend $m=a$; il vient alors

$$b^2c=a^2k, \qquad d=k', \qquad d^4=a^3k''$$
$$c^2=ak''', \qquad d=k'''',$$

et
$$\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+dd}=\frac{a^3\,(k-d+k'')}{a\,(k'''+d)}$$
$$=a\times\frac{a\,(k-d+k'')}{a\,(k'''+d)}.$$

Ce procédé s'applique facilement à la seconde expression proposée

$$\frac{a^7+b^4c^2-d^7}{a^4+b^4}.$$

En prenant tout de suite a au lieu de la quantité arbitraire m, on fera

$$b^4c^2=a^6k, \qquad d^7=a^6k', \qquad b^4=a^3k'',$$

et il viendra

$$\frac{a^7+b^4c^2-d^7}{a^4+b^4}=\frac{a^7+a^6k-a^6k'}{a^4+a^3k''}$$
$$=\frac{a^6\,(a+k-k')}{a^3\,(a+k'')}=a^2\times\frac{a\,(a+k-k')}{a+k''},$$

la dernière formule peut être évidemment prise pour le volume du parallélépipède rectangle dont la base est le quarré, construit sur la ligne a, et dont la hauteur est la ligne représentée par la formule

$$\frac{a(a+k-k')}{a+k''}.$$

77. L'algèbre sert non-seulement à déterminer la grandeur des lignes et des parties de l'étendue, comparées les unes aux autres, mais il fournit encore le moyen de déterminer les figures qu'affectent ces lignes, et en général les formes de l'espace. Descartes, en remarquant le premier que ces figures et ces formes déterminent des relations de grandeur entre des droites, est parvenu à appliquer l'algèbre à la théorie des lignes en général, et par cette découverte, les mathématiques ont entièrement changé de face.

Si l'on conçoit, par exemple, que de tous les points d'une ligne quelconque DE, *fig.* 29, on ait abaissé FIG. 29. des perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. sur une ligne droite AB, donnée de position, et qu'à partir d'un point A, pris à volonté sur cette ligne, on ait mesuré les distances AP, AP', AP'', &c. chacune de ces distances, et la perpendiculaire qui lui correspond, seront liées entre elles de manière que l'une se conclura nécessairement de l'autre. En effet, quand la grandeur de AP sera fixée, la rencontre de la courbe DE avec la perpendiculaire élevée par le point P sur la ligne AB, donnera la grandeur de PM; et quand on aura cette grandeur, que nous supposerons représentée par ab, on obtiendra AP, en prenant sur AC, perpendiculaire à AB, une partie $AQ = ab$, et en menant ensuite la droite QM parallèle à AB, qui rencontrera la ligne DE dans un point M, pour lequel on aura nécessairement $PM = ab$.

Rien n'empêche d'imaginer que les lignes AP, PM, soient rapportées à une ligne commune, prise pour unité, et que, sous ce point de vue, elles ne soient représentées

par des nombres ou par des lettres. Si la relation qui est entre AP et PM, entre AP' et $P'M'$, &c. peut être exprimée par une équation algebrique, cette équation caractérisera la ligne DE, et pourra en faire connoître successivement tous les points; c'est ce qu'on va voir sur deux exemples très-simples.

FIG 30. 78. Prenons pour le premier la droite AE, *fig.* 30, menée par le point A; toutes les perpendiculaires PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. abaissées de chacun de ses points sur la ligne AB, détermineront une suite de triangles APM, $AP'M'$, $AP''M''$, &c. tous semblables entre eux, et qui donneront

$$AP : PM :: AP' : P'M' :: AP'' : P''M'', \text{ &c.}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''}, \text{ &c.}$$

La relation de toutes les distances AP aux perpendiculaires PM est ici bien facile à saisir; elle consiste dans le rapport constant que chacune des premières a avec celle des secondes qui lui correspond; et si l'on désigne ce rapport par a, on aura

$$PM = a \times AP,\ P'M' = a \times AP',\ P''M'' = a \times AP'', \text{ &c.}$$

Toutes ces équations, qui semblent particulières à chaque point de la droite AE, peuvent être comprises dans une seule, en désignant la distance du pied de la perpendiculaire au point A, quelle qu'elle soit, par x, et en représentant la perpendiculaire elle-même par y; car on aura alors $y = ax$. Cette équation, qui renferme deux inconnues, x, y, ne peut donner la valeur que d'une seule, et cela après que l'on a fixé arbitrairement la

valeur de l'autre : lorsqu'on assigne à x une valeur quelconque AP, y prend la valeur correspondante PM. Si l'on a, par exemple, $a = \frac{1}{2}$, on trouve $PM = \frac{1}{2} AP$, c'est-à-dire qu'en prenant PM, égal à la moitié de AP, le point M est sur la droite AE, et non ailleurs.

La ligne AE ne se termine pas brusquement au point A ; on doit, pour embrasser toute son étendue, la concevoir prolongée en AE', au-dessous de la ligne AB, et à gauche de la ligne AC ; cette dernière partie est comprise aussi dans l'équation $y = ax$; car on peut donner à x, dans cette équation, des valeurs négatives, et les valeurs exprimant les distances à la ligne AC doivent être prises du côté opposé à celui où on a porté les valeurs positives (72) : elles donneront donc des points tels que p, placés en arrière du point A. Mais les valeurs correspondantes de y, étant aussi négatives doivent être prises du côté opposé à celui où on a porté les valeurs positives, c'est-à-dire au-dessous de AB, comme pm ; et il est visible d'ailleurs que, si Ap est prise égale à AP, pm sera pareillement égale à PM : on tombera donc de cette manière sur les points du prolongement AE' de la droite AE.

79. Considérons en second lieu le cercle décrit du point A, *fig.* 31, comme centre et d'un rayon égal à la ligne AD. Ce qui distingue les points de la circonférence des autres points du plan, c'est d'être tous à une distance du centre C qui soit égale au rayon AD ; et par conséquent quelque part que l'on prenne le point M sur cette courbe, les droites AP et PM seront les côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuse AM sera égale à AD. En faisant donc FIG. 31.

$$AP = x, \qquad PM = y, \qquad AD = r,$$

on aura

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

et on tirera de là

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

équation qui fait voir que quand x ou AP sera connu, on aura, par le secours du calcul, et sans qu'il soit besoin de construire la figure, y ou PM, ou du moins le rapport de cette ligne avec le rayon. En prenant, par exemple, $x = \frac{1}{3}r$, il viendra

$$y = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{9}r^2} = \sqrt{\tfrac{8}{9}r^2} = r \times \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

On concevra sans peine que l'on peut déduire de la même expression les lignes PM pour tous les points de la ligne AB, compris entre A et D. L'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ prouve aussi bien que la description géométrique de la circonférence du cercle, que cette courbe ne doit pas s'étendre au-delà du point D; car pour prendre le point P au-delà de celui-ci, il faudroit supposer $x > AD$, ou $> r$, et dans ce cas la valeur de y deviendroit imaginaire.

Quoique nous n'ayons considéré que le quadrans DE, les trois autres, qui complètent la circonférence, sont compris dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$; car l'ordonnée y ayant, pour une même valeur de x, deux valeurs, savoir:

$$+\sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{r^2 - x^2},$$

la seconde doit être portée du côté opposé à la première (72), et fournir par conséquent tous les points des quadrans $D'E$. Mais on peut aussi donner à x des valeurs négatives qui doivent se porter de A en D', puisque les valeurs positives ont été portées de A en D; et à chacune de ces valeurs répondront deux valeurs de y: la valeur positive donnera les points du quadrans $D'E$, et la valeur négative les points du quadrans $D'E'$.

80. Quoiqu'on ne tire des équations

$$y = ax, \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

que des valeurs appartenantes à des points isolés et disjoints, néanmoins la continuité qui résulte de la description de la ligne droite et du cercle, représentés respectivement par ces équations, n'est point violée, parce qu'on peut toujours déterminer par leur moyen deux points aussi voisins l'un de l'autre qu'on voudra, puisqu'il suffit pour cela de prendre pour x deux valeurs consécutives presque égales, et que rien ne limite la petitesse de la différence qu'on peut mettre entre elles.

81. Cette manière de représenter le *cours* des lignes, c'est-à dire les circonstances de leur forme et de leur situation, en les rapportant à une droite par des perpendiculaires, mérite la plus grande attention; on voit qu'elle revient à déterminer la position d'un point quelconque, par le moyen de sa distance à deux droites AB et AC, perpendiculaires entre elles. Le point M, *fig.* 29, est en FIG. 29.
effet déterminé lorsqu'on a les distances AP et AQ, puisqu'il se trouve à l'intersection des lignes PM et QM, menées par les points P et Q, parallèlement aux droites AB et AC.

Les lignes AP et AQ, ou leurs égales, QM et PM, se nomment les *coordonnées*. On se sert ordinairement du mot *abscisse* pour désigner celle qu'on suppose connue, et l'on donne à l'autre le nom d'*ordonnée*. Ainsi, dans les exemples précédens, où nous avons toujours exprimé les PM par les AP, PM étoit l'ordonnée, et AP l'abscisse. Les lignes AB et AC, qui déterminent la direction des coordonnées, se nomment les *axes des coordonnées*.

Il faut bien observer que pour les points situés sur la

ligne AB, la distance AQ ou PM est nulle, et que par conséquent, si on la représente par y, on a pour tous ces points, $y = 0$; par la même raison on a QM, ou AP, ou $x = 0$, pour tous ceux qui sont placés sur l'axe AC; et enfin au point A, qu'on nomme *l'origine des coordonnées*, on a en même temps

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

En ne donnant que les valeurs absolues de l'abscisse AP et de l'ordonnée PM, le point M reste encore indéterminé à quelques égards; car on ne connoît alors que les distances de ce point aux droites indéfinies BB' et CC', *fig.* 32; et en conservant ces mêmes distances, il pourroit se trouver indifféremment dans l'un quelconque des quatre angles droits BAC, $B'AC$, $B'AC$, BAC'; mais les combinaisons des signes affectés aux coordonnées AP et PM, font connoître dans lequel de ces angles se trouve le point proposé. En effet, étant convenu de donner le signe plus aux parties de la ligne AB, en allant de A vers B, le signe moins sera celui qu'il faudra assigner aux parties de AB', en allant de A vers B'. De même, si l'on a donné le signe plus aux parties de AC, en allant de A vers C, les parties de AC', en allant de A vers C', seront nécessairement affectées du signe moins. Cela posé, on aura

FIG. 32.

pour le point M de l'angle			ou	
BAC, ...	$+AP$	$+PM$		$+x$ $+y$
$B'AC$, ...	$-AP$	$+PM$		$-x$ $+y$
$B'AC$, ...	$-AP$	$-PM$		$-x$ $-y$
BAC', ...	$+AP$	$-PM$		$+x$ $-y$

Le choix des lignes AB et AC, perpendiculaires entre

elles, n'est pas le seul qu'on puisse faire pour déterminer sur un plan la position d'un système quelconque de points; toute combinaison de lignes capable de fixer la position d'un point, les distances à deux points fixes, par exemple, seroit également propre à cet usage; mais dans le plus grand nombre de cas les *coordonnées perpendiculaires* sont celles dont l'emploi présente le plus de facilité, et on verra plus loin plusieurs exemples de la manière dont on passe de ces coordonnées à diverses manières d'assigner sur un plan la position des points.

82. L'équation qui exprime les relations entre les AP et les PM pour une ligne donnée, s'appelle l'équation de cette ligne, et celle-ci se nomme à son tour le *lieu* de l'équation qui lui appartient.

Il est visible que toute question géométrique indéterminée, renfermant deux inconnues, conduit à un *lieu* géométrique. S'il s'agissoit par exemple de former tous les angles rectangles que l'on peut construire sur une hypothénuse donnée a, en nommant x et y les côtés de l'angle droit de ce triangle, l'équation du problême seroit $x^2 + y^2 = a^2$; et on satisferoit à la question en décrivant sur un rayon égal à a un quart de cercle, et en abaissant de tous les points de ce quart de cercle des perpendiculaires sur son rayon: le quart de cercle seroit le *lieu* de tous les sommets de l'un des angles aigus de ces triangles.

L'équation d'une courbe s'obtient toujours en exprimant analytiquement l'une quelconque de ses propriétés, comme nous l'avons fait pour la ligne droite, ou les circonstances de sa description, ainsi que nous en avons usé à l'égard du cercle. Réciproquement une équation quelconque, considérée en elle-même, donne aussi nais-

sance à une courbe dont elle fait connoître les propriétés. Ce dernier point de vue étant le plus général et le plus fécond, c'est désormais de la considération des équations que nous déduirons les lignes.

85. De toutes les équations à deux indéterminées, la plus simple est celle du premier degré, et elle appartient à la ligne droite, la plus simple de toutes les lignes. Cette équation peut être représentée par $Cy = Ax + B$; mais en la divisant par C, elle ne perdra rien de sa généralité, et deviendra $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$, ou $y = ax + b$, en faisant $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$: c'est sous cette forme que nous l'emploierons désormais.

Supposons d'abord que b soit nul, on aura

$$y = ax \text{ ou } \frac{y}{x} = a;$$

c'est-à-dire que dans toute l'étendue de la droite, le rapport de PM à AP, *fig.* 30, sera constant. Cette propriété, qui n'est que l'expression de la similitude des triangles APM, $AP'M'$, &c. et de laquelle il résulte que $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$, &c. quelque part qu'on prenne les points P, P', &c. sur la ligne AB, ne peut appartenir qu'à la ligne droite AE, menée par le point A, origine des coordonnées.

FIG. 30.

Le rapport $\frac{y}{x}$ ou le coefficient a, dépend de l'angle que fait la droite AE avec l'axe des abscisses AB; mais dans le triangle APM, que nous supposons rectangle en P, le rapport de PM à AP est égal à la tangente de l'angle

l'angle PAM (29) : a représente donc la tangente de cet angle.

En considérant l'équation $y = ax + b$, on voit que la nouvelle ordonnée y ne diffère de la première, $y = ax$, qu'en ce qu'elle la surpasse de la quantité b; d'où il suit que si on prend $AD = b$, et qu'on mène la ligne DF parallèle à AE, elle sera le lieu de l'équation $y = ax + b$, puisqu'on aura

$$PN = PM + MN = PM + AD,$$
$$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD, \text{ \&c.}$$

et il faut bien remarquer que le coefficient a restera le même pour toutes les droites parallèles à AE.

Il est aisé de voir que rien, dans l'équation $y = ax + b$, ne limite les valeurs que l'on peut donner à x, et que par conséquent celles de y deviendront aussi grandes qu'on voudra; mais en même temps, rien ne bornant le cours de la ligne DF dans l'espace indéfini BAC, on trouvera toujours des abscisses et des ordonnées assez grandes pour représenter les valeurs de y et de x, qui satisferont à l'équation proposée.

Faisons $x = 0$, nous aurons $y = b$, et cette valeur appartiendra au point D, où la droite DF rencontre l'axe AC des ordonnées. Lorsque x sera négatif, on trouvera

$$y = -ax + b,$$

et ax étant moindre que b, y sera encore positif, mais moindre que b ou AD. Le cours de la ligne DF' nous montre que cette circonstance ne peut avoir lieu que dans la partie DF', correspondante à des abscisses Ap, situées du côté opposé aux abscisses AP, que nous avons choisies pour représenter les valeurs positives de x; c'est donc de ce côté qu'il faut prendre les valeurs négatives de x

Pour trouver la valeur de x, qui répond au point f où la ligne DF rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y = 0$, ce qui donne

$$ax + b = 0, \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{a} = Af.$$

Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{y}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au-delà du point f, la ligne DF se trouve au-dessous de la ligne AB; l'ordonnée $p'n'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle étoit située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives.

Ces remarques, qui confirment ce qui a été dit dans le n°. 72, ne sont pas particulières à la ligne droite. On ne sauroit y faire trop d'attention; car c'est de l'usage des quantités négatives dans les figures, que dépendent en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes.

L'équation $y = ax + b$ ne renfermant que deux constantes, a et b, dont la valeur particularise la droite qu'on considère, en la distinguant de toute autre, il s'ensuit que deux conditions suffisent pour déterminer cette droite. Celles qui s'offrent les premières, sont de l'assujettir à passer par deux points donnés; à être parallèle ou perpendiculaire à une autre droite donnée, et à passer en outre par un point donné. Nous aurons besoin dans la suite de connoître la forme que prend l'équation $y = ax + b$, pour satisfaire à ces diverses conditions; c'est pourquoi nous allons les examiner chacune en particulier.

84. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui

passe par deux points, dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées β et β', on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à celle de y, et on aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\beta &= a\alpha + b\\ \beta' &= a\alpha' + b\end{aligned}\right\} \text{ dont on tirera } \left\{\begin{aligned}a &= \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\\ b &= \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}\end{aligned}\right.$$

et il en résultera

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner à ce résultat une forme plus simple; car si on retranche de l'équation $y = ax + b$, l'une des deux équations ci-dessus, la première, par exemple, b disparoîtra, et il viendra

$$y - \beta = a(x - \alpha);$$

cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque : en y mettant, au lieu de a, la valeur trouvée précédemment, on aura

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

La distance des points proposés, ou la partie qu'ils interceptent sur la droite cherchée, aura pour expression

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2};$$

cela se voit évidemment, en supposant que N et N' représentent ces points; car leur distance NN' étant l'hypothénuse du triangle rectangle NRN', il s'ensuit que

$$\overline{NN'}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{N'R}^2 = (AP' - AP)^2 + (P'N' - PN)^2.$$

85. Pour obtenir l'équation de la ligne droite qui passeroit par le point dont les coordonnées sont α et β, et qui seroit parallèle à la ligne représentée par l'équation $y = a'x + b'$, il suffira de substituer a' au lieu de a dans l'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$, qui satisfait déjà à la première condition, puisque, d'après le n° 83, le coefficient de x est le même dans les équations des lignes droites parallèles entre elles; on aura donc pour celle qu'on cherche

$$y - \beta = a'(x - \alpha).$$

FIG. 33. 86. Enfin, si AE et AI, *fig.* 33, sont deux droites perpendiculaires entr'elles, et passant par l'origine A des coordonnées, leurs équations seront de la forme

$$y = ax, \qquad y = a'x;$$

mais les triangles Amp et Apn étant semblables, on trouvera, en comparant les côtés Ap et pm du premier à leurs homologues pn et Ap du second,

$$\frac{pm}{Ap} = \frac{Ap}{pn} \qquad \text{ou} \qquad \overline{pm} \times \overline{pn} = \overline{Ap}^2.$$

En désignant par x l'abscisse Ap, commune aux deux droites, les ordonnées seront respectivement

$$pm = ax, \qquad pn = a'x,$$

et on aura

$$aa'x^2 = x^2,$$

d'où

$$aa' = 1, \qquad a' = \frac{1}{a}.$$

Voilà donc la grandeur de a déterminée; mais il faut observer que le point n de la ligne AI étant au-dessous de l'axe AB des abscisses, l'ordonnée pn doit être négative; les équations des droites AE et AI seront donc

$$y = ax \text{ et } y = -\frac{1}{a}x.$$

Considérant ensuite les droites DF et GH, respecti-

vement parallèles à AE et à AI, et par conséquent perpendiculaires entre elles, on trouvera pour leurs équations

$$y = ax + b \text{ et } y = -\frac{1}{a}x + b' \text{ (n° précéd.)}.$$

Si la seconde doit passer par un point N dont les coordonnées soient α et β, son équation deviendra

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha).$$

87. Deux lignes qui se coupent ont dans leur point d'intersection les mêmes coordonnées; en sorte que pour trouver celles du point de rencontre des deux droites données par les équations

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b',$$

il n'y a qu'à supposer que les inconnues, x et y, ont la même valeur dans l'une et dans l'autre équation: on aura ainsi

$$ax + b = a'x + b',$$

ce qui donnera

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ et } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

On voit par ces valeurs que le point de concours est d'autant plus éloigné des axes AB et AC, que la quantité $a' - a$ est plus petite, et qu'enfin x et y deviennent infinis, lorsque $a' = a$; c'est-à-dire lorsque les droites proposées cessent de se rencontrer, ou sont parallèles.

88. Il peut être utile de connoître la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une ligne donnée; et on y parviendra en cherchant les différences entre les coordonnées de ce point et celles du point où

la droite donnée rencontre la ligne qui lui est perpendiculaire.

L'équation de la première étant

$$y = ax + b,$$

celle de la seconde sera

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha),$$

si α et β désignent les coordonnées du point donné; mais on peut mettre l'équation $y = ax + b$ sous la forme

$$y - \beta = ax + b - \beta - a\alpha + a\alpha,$$

qui revient à

$$y - \beta = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha,$$

et, jointe à $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$, elle donnera

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{1 + a^2}, \quad y - \beta = -\frac{\beta - a\alpha - b}{1 + a^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},$$

on aura, pour la longueur de la perpendiculaire cherchée,

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

89. Ce qui précède nous conduit à l'expression du sinus, du cosinus et de la tangente de l'angle que forment entre elles les deux droites données. Soient

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b',$$

les équations des deux droites proposées; il est évident que l'angle qu'elles font entre elles ne changeroit point si on les faisoit mouvoir toutes deux parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce qu'elles passassent par l'origine des ordonnées, et alors leurs équations se réduiroient à

$$y = ax, \qquad y = a'x \text{ (83).}$$

C'est dans cet état que nous les considérerons, et nous les représenterons par les lignes AM et AM', *fig.* 34. FIG. 34. Ayant pris sur l'une d'elles un point M', dont les coordonnées AP' et $P'M'$ soient désignées par α et β, la perpendiculaire MM' abaissée de ce point sur l'autre ligne AM, sera exprimée par $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}$, à cause de $b = o$ (88); mais si l'on fait $AM' = r$ on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

et parce que le point M' est sur la ligne AM', dont l'équation est $y = a'x$, il s'ensuivra $\beta = a'\alpha$. Cette équation combinée avec la précédente, donnera

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1+a'^2}}, \qquad \beta = \frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2}};$$

substituant ces valeurs dans celles de la perpendiculaire, on trouvera

$$\frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$$

et si l'on donne à la perpendiculaire MM' le nom de sinus, qu'on lui a assigné dans la trigonométrie, on aura

$$\sin MAM' = \frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}},$$

en prenant r pour rayon.

Si on retranche de r^2 le quarré de cette expression, on aura celle de $\overline{AM}^2$, ou du quarré du cosinus de l'angle MAM'; on obtiendra $(\cos MAM')^2 = \frac{r^2(1+a^2)(1+a'^2) - r^2(a'-a)^2}{(1+a^2)(1+a'^2)} = \frac{r^2(1+2aa'+a^2a'^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)}$, et prenant la racine quarrée il viendra

$$\cos MAM' = \frac{r(1+aa')}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}};$$

enfin, faisant $r=1$, on en tirera de ces deux expressions

$$\text{tang } MAM' = \frac{\sin MAM'}{\cos MAM'} = \frac{(a'-a)}{1+aa'}.$$

Nous aurions pu déduire immédiatement cette dernière valeur de la formule

$$\text{tang}(p \pm q) = \frac{\text{tang } p \pm \text{tang } q}{1 \mp \text{tang } p \text{ tang } q},$$

rapportée dans le tableau de la page 30, puisque l'angle MAM' est la différence des angles BAM' et BAM, et que par conséquent, si l'on désigne ces derniers par p et q, on aura

$$\text{tang } p = a', \quad \text{tang } q = a, \text{ et } \text{tang}(p-q) = \frac{a'-a}{1+aa}$$

comme ci-dessus; mais cette formule repose sur celles du numéro 11, que nous avons obtenues par le moyen d'une construction, et nous nous sommes proposé de tirer des seules équations des lignes, tout ce qui est nécessaire pour l'application de l'algèbre à la géométrie.

90. L'équation du cercle obtenu dans le n° 79, n'est que particulière, parce qu'on a donné au centre une situation déterminée, en le mettant à l'origine des coordonnées. Pour généraliser l'équation de cette courbe, il faudroit avoir l'équation du cercle $DED'E'$, *fig.* 31, en prenant pour origine des coordonnées le point A''', placé d'une manière quelconque par rapport au centre A; et pour cela il suffiroit d'écrire analytiquement que la distance de ce centre à chacun des points de la circonférence, est égale à r. Or, si l'on désigne par p, q, les lignes $A'''A'$ et $A'A$, qui seront alors les coordonnées du

FIG. 31.

centre A par rapport aux axes $A''B'$ et $A'''C'$, et que l'on fasse $A'''Q = x$, $QM = y$, on aura (84)

$$AM = r = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2},$$

d'où on tirera, en quarrant les deux membres et en développant,

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2.$$

Cette dernière équation est la plus générale que l'on puisse obtenir pour le cercle, en la rapportant à des coordonnées rectangles : elle ne peut être particularisée que par la détermination des trois quantités constantes p, q et r, dont les deux premières fixent la position du centre, et la troisième représente le rayon. Il suit de-là qu'il faut trois conditions pour déterminer la position et la grandeur d'un cercle; et c'est aussi ce qu'on a vu dans les Elémens de géométrie.

Si on vouloit déterminer le cercle qui passe par trois points dont les coordonnées soient

$$\alpha \text{ et } \beta, \quad \alpha' \text{ et } \beta', \quad \alpha'' \text{ et } \beta'',$$

on mettroit α, α', α'' à la place de x, et β, β', β'' à celle de y, on formeroit ainsi les trois équations

$$\begin{aligned}
\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2 &= r^2,\\
\alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 + \beta'^2 - 2q\beta' + q^2 &= r^2,\\
\alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 + \beta''^2 - 2q\beta'' + q^2 &= r^2,
\end{aligned}$$

qui ne renferment que trois inconnues, savoir : p, q et r.

Si on retranche successivement la première de la deuxième et de la troisième, on aura, en effaçant les termes qui se détruisent,

$$\begin{aligned}
2\{(\alpha-\alpha')p + (\beta-\beta')q\} + \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 &= 0,\\
2\{(\alpha-\alpha'')p + (\beta-\beta'')q\} + \alpha^2 - \alpha''^2 + \beta^2 - \beta''^2 &= 0;
\end{aligned}$$

ces deux équations ne contenant p et q qu'au premier

degré, font voir que le centre du cercle demandé ne peut avoir qu'une seule position ; et quant au rayon, comme on a immédiatement

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2},$$

il n'est susceptible que d'une seule grandeur : on ne peut donc faire passer par trois points qu'un seul cercle.

Je n'acheverai point la résolution des équations ci-dessus, qui pourroit s'abréger par l'effet de la symétrie des quantités qu'elles renferment, parce que les résultats de cette solution sont inutiles pour ce qui doit suivre.

91. L'équation générale du cercle

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

se simplifie de plusieurs manières, qui méritent d'être remarquées, parce que les formes qu'elle prend alors sont employées fréquemment dans l'analyse.

Si l'on y fait $p = 0$, $q = 0$, on retombe sur $x^2 + y^2 = r^2$.

Pour placer l'origine des coordonnées sur la circonférence du cercle, il suffit de faire $p^2 + q^2 = r^2$, puisque $\sqrt{p^2 + q^2}$, exprimant alors la distance du centre à l'origine, il s'ensuit que cette distance est égale au rayon : l'équation du cercle se réduit dans ce cas, à cause de celle qu'on vient de poser, à

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0.$$

Enfin, si, pour plus de simplicité, on prenoit l'origine à l'extrémité D' du diamètre, le centre se trouvant alors sur l'axe des abscisses, son ordonnée deviendroit nulle, son abscisse α seroit égale au rayon r ; et l'équation ci-dessus se changeroit en

$$x^2 - 2px + y^2 = 0,$$

Cette dernière et la première, $x^2 + y^2 = 0$, sont celles

des équations du cercle dont on fait le plus fréquent usage.

92. Ce qui précède étant bien compris, toutes les questions que l'on peut proposer sur la ligne droite et sur le cercle, se ramènent facilement à l'algèbre, sans qu'il soit besoin de recourir à d'autres propriétés des figures qu'à la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle (*). Proposons-nous, pour premier exemple, cette question :

Deux lignes droites, AE *et* DE, fig. 35, *étant données par les angles qu'elles font avec une troisième* AB : *et par la partie* AD *qu'elles interceptent sur cette troisième, trouver sur une ligne* AC, *perpendiculaire à* AB, *un point* G, *par lequel, menant une droite* GK, *parallèle à* AB, *la partie* HK, *comprise entre* AE *et* DE *soit d'une grandeur donnée.* FIG. 35.

Formons d'abord les équations des droites AE et ED. Soient a et a' les tangentes des angles EAD, EDA, qu'elles font respectivement avec la droite AB, que nous prendrons pour l'axe des abscisses dont nous supposerons l'origine au point A, ainsi que celle des ordonnées y que nous concevrons parallèles à AC; et faisons $AD = \alpha$. La première droite aura pour équation $y = ax$, puisqu'elle passe par le point A; la seconde devant passer par le point D, pour lequel on a

(*) Dans les notes qu'il a placées à la suite de ses Elémens de géométrie, Legendre déduit ces propriétés des premières conséquences de la superposition des triangles égaux par un moyen très-élégant; mais les considérations qu'il emploie pour cela sont malheureusement trop abstraites pour pouvoir servir de base à un livre élémentaire, et porter dans l'esprit cette conviction intime qui résulte des notions reçues immédiatement par les sens.

$$y = 0 \ (81) \quad \text{et} \quad x = \alpha,$$

sera

$$y = -a' (x - \alpha),$$

en observant que y diminue tandis que x augmente, et que par conséquent a' doit être pris négativement : on aura donc ces deux équations :

$$y = ax, \qquad y = -a' (x - \alpha).$$

Pour obtenir les points H et K, où les droites qu'elles représentent rencontrent la ligne GK, parallèle à AB, il suffit d'y faire $y = AG$; si donc on pose $AG = t$, on aura

$$t = ax, \qquad t = -a' (x - \alpha) :$$

prenant la valeur de x dans chacune de ces équations ; il viendra

$= \frac{t}{xa}$ pour l'une, et $x = \frac{\alpha a' - t}{a'}$ pour l'autre.

Ces expressions sont celles des abscisses Ah et Ak, dont la différence donne $hk = HK$, à cause des parallèles ; et désignant par m la grandeur que doit avoir HK, on trouvera

$$m = \frac{\alpha a' - t}{a'} - \frac{t}{a},$$

d'où l'on tirera

$$aa' m = \alpha aa' - ta - ta',$$

et par conséquent

$$t = \frac{(\alpha - m) aa'}{a + a'}.$$

Telle est la valeur de AG, qui satisfait à la question proposée.

93. Supposons qu'au lieu de donner à la ligne HK une grandeur connue, on demande qu'elle soit égale à la ligne AG, ce qui revient à inscrire un quarré dans un trian-

gle (61). Dans ce cas, au lieu d'égaler à m l'expression de HK, il faudra l'égaler à t, ce qui donnera

$$t=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a},$$

d'où l'on déduira

$$t=\frac{\alpha a a'}{aa'+a+a'}.$$

94. Soit encore le problême suivant, déjà résolu au n° 74 : *D'un point* E, fig. 28, *placé comme on voudra*, FIG. 28. *mener une droite de manière que la partie* D'F' *de cette droite, interceptée entre deux lignes qui forment entr'elles un angle droit* BAC', *soit d'une grandeur donnée.*

Désignons par α et β les coordonnées du point donné E; représentons par $y-\beta=-a(x-\alpha)$ l'équation de la droite ED', menée par ce point. Pour obtenir la longueur de $D'F'$, il suffit de déterminer AD' et AF', c'est-à-dire la valeur de y lorsque $x=0$, et celle de x lorsque $y=0$, hypothèses qui fournissent les équations

$$y-\beta=a\alpha, \qquad -\beta=-a(x-\alpha),$$

desquelles on tire

$$y=\beta+a\alpha=AD' \qquad x=\frac{\beta+a\alpha}{a}=AF';$$

et comme $F'D'=\sqrt{\overline{AD'}^2+\overline{AF'}^2}$, il en résulte

$$F'D'=\sqrt{(\beta+\alpha a)^2+\frac{1}{a^2}(\beta+a\alpha)^2}=\frac{\beta+a\alpha}{a}\sqrt{1+a^2};$$

posant $F'D'=m$, et élevant au quarré, pour faire disparoître le radical, il vient

$$m^2=\left(\frac{\beta+a\alpha}{a}\right)^2(1+a^2).$$

Cette équation étant développée et ordonnée par rapport à la lettre a, se changera en

$$a^4+\frac{2\beta}{\alpha}a^3+\frac{\beta^2+\alpha^2-m^2}{\alpha^2}a^2+\frac{2\beta}{\alpha}a+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0,$$

et monte, comme on voit, au quatrième degré; mais si l'on fait $\beta=\alpha$, c'est-à-dire, si l'on prend le point E à égale distance des deux axes AC et AB, elle devient

$$a^4+2a^3+\frac{2\alpha^2-m^2}{\alpha^2}a^2+2a+1=0,$$

et rentre dans l'équation (3) du n° 74, lorsqu'on change a en z et α en a.

95. Faisons maintenant l'application des formules que nous avons trouvées pour la ligne droite, à la recherche des principales propriétés du triangle. Prenons à cet effet deux points M et M', *fig.* 36, formant avec l'origine A, un triangle quelconque; désignons les coordonnées du premier par..... α, β,
celles du second par... α', β:
les distances AM, AM', MM', qui forment les côtés de ce triangle, seront, d'après le numéro 84, exprimées respectivement par

FIG. 36.

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},\quad \sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}.$$

Si l'on fait $AM=c$, $AM'=c'$, $MM'=c''$, on aura ces équations:

$$\left.\begin{aligned} c^2&=\alpha^2+\beta^2,\\ c'^2&=\alpha'^2+\beta'^2\\ c''^2&=\alpha'^2-2\alpha'\alpha+\alpha^2+\beta'^2-2\beta'\beta+\beta^2 \end{aligned}\right\}(A);$$

et si on retranche la dernière de la somme des deux premières, il viendra

$$c^2+c'^2-c''^2=2(\alpha\alpha'+\beta\beta'),$$

d'où

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}.$$

Les équations des lignes AM et AM' seront

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'}x \quad (83);$$

le cosinus de l'angle qu'elles forment entr'elles aura, pour expression (89),

$$\frac{r\left(1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)}} = \frac{r(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)}}.$$

En faisant le rayon $r = 1$, comme celui des tables des sinus, et substituant à la place des quantités $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, leurs valeurs c', c'^2, $\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}$,

il viendra

$$\cos MAM' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'},$$

équation qui donne une relation entre les trois côtés du triangle MAM' et l'un de ses angles. Si l'on fait attention que l'angle MAM' est opposé au côté $MM' = c''$, on sera convaincu qu'on doit avoir pour les angles AMM', $AM'M$, respectivement opposés aux côtés $AM' = c'$, $AM = c$, les équations

$$\cos AMM' = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2cc''},$$

$$\cos AM'M = \frac{c'^2 + c''^2 - c^2}{2c'c''}.$$

En désignant donc par γ'', γ', γ, les angles MAM', AMM', $AM'M$, on obtiendra les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} c^2 + c'^2 - 2cc'\cos\gamma'' &= c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc''\cos\gamma' &= c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c''\cos\gamma &= c^2 \end{aligned}\right\} \text{(A)}.$$

Si l'on ajoute ensemble la première et la seconde de ces équations, puis la première et la troisième, puis la seconde et la troisième, on obtiendra trois résultats qui deviendront respectivement divisibles par $2c$, $2c'$, $2c''$, lorsqu'on aura effacé les termes communs aux deux membres de chacun, et qui donneront ainsi

$$\left.\begin{aligned} c - c'\cos\gamma'' - c''\cos\gamma' &= 0 \\ c' - c\cos\gamma'' - c''\cos\gamma &= 0 \\ c'' - c\cos\gamma' - c'\cos\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(B)}.$$

Il est bon d'observer que ces équations s'obtiennent immédiatement en abaissant successivement de chaque angle du triangle, une perpendiculaire sur le côté opposé, et en calculant les segmens de ce côté.

On a dans la figure 14

FIG. 14.

$$BD = AB\cos B, \qquad CD = AC\cos C$$
$$BC = BD + CD = AB\cos B + AC\cos C.$$

Nommant $BC = c$, $AB = c'$, $AC = c''$, et conservant les dénominations des angles, il viendra

$$c = c'\cos\gamma'' + c''\cos\gamma' \text{ ou } c - c'\cos\gamma'' - c''\cos\gamma' = 0.$$

On parviendroit de même aux deux autres équations (B).

96. Quoique ces équations soient au nombre de trois, elles ne peuvent cependant faire connoître les côtés lorsque les trois angles sont donnés; car si on cherchoit les valeurs de c, c', c'', au moyen des expressions générales des inconnues, déterminées par trois équations du premier degré, on trouveroit 0, à cause que le terme connu manque. Mais ces mêmes équations se changent en

$$1 - p\cos\gamma'' - q\cos\gamma' = 0$$
$$p - \cos\gamma'' - q\cos\gamma = 0$$
$$q - \cos\gamma' - p\cos\gamma = 0,$$

lorsqu'on fait $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$; elles donnent alors le rapport des côtés du triangle proposé, et il reste de plus une équation de condition, qu'on obtient en éliminant p et q. Cette équation est

$$1 - \cos\gamma''^2 - \cos\gamma'^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\gamma''\cos\gamma'\cos\gamma = 0;$$

et son premier membre est précisément le dénominateur commun des valeurs des inconnues c, c', c'', déduites des expressions générales citées plus haut. En égalant cette quantité à zéro, les valeurs des côtés c, c', c'', deviennent $\frac{0}{0}$, et les côtés demeurent par conséquent indéterminés, comme le prouve la transformation opérée sur les équations (B).

L'équation de condition, que l'on vient d'indiquer, renferme la relation que doivent avoir entre eux les trois angles γ, γ' et γ'', pour que leur somme soit égale à deux droits, ainsi que l'exige la nature du triangle rectiligne. Pour s'en assurer, il faut, à l'aide des valeurs de $\sin(p \pm q)$, $\cos(p \pm q)$ (11), développer l'équation $\cos(2q - \gamma'' - \gamma') = \cos\gamma$: on trouvera d'abord

$$-\cos(\gamma'' + \gamma') = \cos\gamma,$$

en observant que $\sin 2q = 0$, et que $\cos 2q = -1$; puis il viendra

$$-\cos\gamma''\cos\gamma' + \sin\gamma''\sin\gamma' = \cos\gamma,$$

d'où

$$\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma' = \sin\gamma''\sin\gamma',$$

$$(\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma')^2 = \sin\gamma''^2\sin\gamma'^2 = (1 - \cos\gamma''^2)(1 - \cos\gamma'^2),$$

et après les réductions, on retombera sur l'équation ci-dessus.

Il est à propos de remarquer que les équations (A)

sont, par rapport aux triangles rectilignes, ce que les équations (B) du numéro 44 sont à l'égard des triangles sphériques, et conduiroient, par de simples transformations, aux formules de la résolution des premiers triangles.

97. Pour avoir l'aire du triangle MAM', il faudra, du point A, abaisser une perpendiculaire AD sur le côté MM' qui, passant par les points M et M', dont les coordonnées sont respectivement α et β, α' et β', a pour équation (84)

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha),$$

ou
$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\alpha'-\alpha}.$$

En comparant cette dernière équation avec la formule $y=ax+b$, on trouvera

$$a=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}, \qquad b=\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\alpha'-\alpha};$$

mais en observant que dans le numéro 86, les lettres α et β désignent les coordonnées du point d'où part la perpendiculaire, coordonnées qui sont nulles dans le cas actuel, puisque ce point est l'origine, l'expression de la perpendiculaire se réduit à

$$\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{\alpha'\beta-\beta'\alpha}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}};$$

et mettant c'' au lieu de $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$, il viendra

$$AD=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{c''}.$$

Avec cette valeur, on aura pour l'aire du triangle MAM',

$$\frac{MM'\times AD}{2}=S=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2},$$

expression bien remarquable, en ce qu'elle donne l'aire

de tous les triangles qui ont leur sommet au point A, au moyen des coordonnées des sommets des angles adjacens à leur base.

On peut la changer en une autre qui ne dépende que des côtés. Pour cela, il faut multiplier entre elles les deux equations

$$\alpha^2+\beta^2=c^2, \qquad \alpha'^2+\beta'^2=c'^2,$$

et retrancher du produit le quarré de

$\alpha\alpha'+\beta\beta'=\dfrac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$; il viendra

$$\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2-2\alpha\alpha'\beta\beta'=c^2c'^2-\frac{(c^2+c'^2-c''^2)^2}{4};$$

prenant les racines quarrées, et réduisant tous les termes du second membre au même dénominateur, on trouvera

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2},$$

et l'aire du triangle MAM' aura pour expression

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2}.$$

dont le développement s'accorde avec le résultat du n° 60.

98. Concevons maintenant un quatrième point M'', dont les coordonnées soient α'', β'', et représentons par d, d', d'', les distances AM'', MM'', $M'M''$, nous aurons

$$\alpha''^2+\beta''^2=d^2$$
$$(\alpha''-\alpha)^2+(\beta''-\beta)^2=d'^2$$
$$(\alpha''-\alpha')^2+(\beta''-\beta')^2=d''^2.$$

En développant ces équations, et substituant dans les deux dernières, à la place des quantités $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha'^2+\beta'^2$, $\alpha''^2+\beta''^2$, leurs valeurs c^2, c'^2 et d^2, on obtiendra

$$c^2+d^2-2(\alpha\alpha''+\beta\beta'')=d'^2$$
$$c'^2+d^2-2(\alpha'\alpha''+\beta'\beta'')=d''^2;$$

si, pour abréger, on fait

$$\frac{c^2+d^2-d'^2}{2}=d_{,}, \qquad \frac{c'^2+d^2-d''^2}{2}=d',$$

on aura

$$d_{,} = \alpha\alpha'' + \beta\beta'', \qquad d_{,,} = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta''.$$

Prenant dans ces équations la valeur de α'' et celle de β'', qui sont

$$\alpha'' = \frac{\beta' d_{,} - \beta d_{,,}}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \qquad \beta'' = \frac{\alpha d'' - \alpha' d''}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

pour les mettre dans $\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$, et ayant égard aux équations $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2$, on trouvera

$$c^2 d_{,,}^2 + c'^2 d_{,}^2 - 2 d_{,} d_{,,} (\alpha\alpha' + \beta\beta') = d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \text{ (C)}.$$

Remplaçant ensuite les quantités $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ et $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, par leurs valeurs

$$\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

obtenues ci-dessus, et remettant

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2}, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2},$$

pour $d_{,}$, $d_{,,}$, cette équation ne renfermera plus que les six distances

$$AM,\ AM',\ MM',\ AM'',\ MM'',\ M'M'',$$

qui forment les quatre côtés et les deux diagonales du quadrilatère $AMM'M''$. Quand les quatre côtés de ce quadrilatère et l'une de ses diagonales seront connus, on pourra trouver l'autre diagonale.

99. Si l'on vouloit déterminer le point M'' par les conditions que les trois distances AM'', MM'', $M'M''$ fussent égales, ce point seroit alors le centre du cercle circonscrit au triangle proposé, et l'on auroit

$$d = d' = d'',$$

ce qui donneroit

$$d_{,} = \frac{c^2}{2}, \qquad d_{,,} = \frac{c'^2}{2};$$

l'équation (C) deviendroit

$$c^2 c'^4 + c'^2 c^4 - 2c^2 c'^2 (\alpha\alpha' + \beta\beta') = 4d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

et se réduiroit à

$$c^2 c'^2 c''^2 = 16\, d^2 S^2,$$

en mettant pour $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ sa valeur, et en observant que si on désigne par S la surface du triangle AMM', égale à $\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2}$ (97), on aura

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = 4S^2.$$

Nous tirerons de là

$$d = \frac{cc'c''}{4S},$$

expression très-simple du rayon du cercle circonscrit au triangle proposé; et en écrivant $\frac{c^2}{2}$ et $\frac{c'^2}{2}$ au lieu de d, et $d_{,,}$ dans les valeurs de α'' et de β'', nous aurons les coordonnées du centre de ce cercle.

100. Il ne sera pas plus difficile de trouver les coordonnées du centre du cercle inscrit, et le rayon de ce cercle. Dans ce cas, le point M'', *fig.* 37, se trouve au- FIG. 37. dedans du triangle, et dans une situation telle, que les perpendiculaires abaissées de ce point sur chacun des côtés AM, AM', MM', sont égales entre elles. Pour exprimer analytiquement cette circonstance, il suffit de former les équations des trois lignes ci-dessus, et d'en déduire, par la formule du numéro 88, les longueurs des perpendiculaires menées du point M'', dont les coordonnées sont α'' et β''. Or, ces équations sont respectivement

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x, \qquad y = \frac{\beta'}{\alpha'}x \ (83),$$

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \ (84);$$

les perpendiculaires abaissées sur chacune d'elles auront pour expression

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\beta''-(\beta'-\beta)\alpha''+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}},$$

et pourront s'écrire ainsi :

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{c}, \qquad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{c'},$$

$$\frac{-(\alpha\beta''-\alpha''\beta)-(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}{c''}$$

en mettant pour les radicaux leurs valeurs c, c', c''.

Si maintenant on se rappelle que la formule qui donne la perpendiculaire abaissée d'un point sur une ligne, a été obtenue par une extraction de racine quarrée, et qu'elle est par conséquent susceptible d'être prise positivement ou négativement, on en conclura que chacune des expressions ci-dessus a deux valeurs. Pour n'employer que celles qui sont positives, il faut observer que, d'après la figure, la ligne AM' s'écartant plus de l'axe des abscisses AB que la ligne AM, et le point M'' étant compris entre la première et la dernière, on doit avoir

$$\frac{\beta'}{\alpha'}>\frac{\beta''}{\alpha''}, \qquad \frac{\beta'}{\alpha'}>\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\beta''}{\alpha''}>\frac{\beta}{\alpha},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha''\beta'>\alpha'\beta'', \qquad \alpha\beta>\alpha'\beta, \qquad \alpha\beta''>\alpha''\beta;$$

d'où il suit que, pour donner une valeur positive, l'expression de la seconde perpendiculaire doit être prise avec des signes contraires à ceux qu'elle a ci-dessus.

De plus le point M'' se trouvant au-dessous de la droite MM', dont l'équation est

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha},$$

il faut que

$$\beta'' < \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\alpha'' + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

ou que $$\beta'' < \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}\alpha'' + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'},$$

ce qui donne

$$\alpha\beta'' - \alpha'\beta'' < \alpha''\beta - \alpha''\beta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

ou bien

$$\alpha\beta'' - \alpha''\beta + \alpha''\beta' - \alpha'\beta'' < \alpha\beta' - \alpha'\beta :$$

condition d'après laquelle l'expression de la troisième perpendiculaire est positive.

Si d'après ces considérations, on fait

$$\frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c} = e, \qquad \frac{\alpha''\beta' - \alpha'\beta''}{c'} = e',$$

$$\frac{-(\alpha\beta'' - \alpha\beta'') - (\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + (\gamma\beta' - \alpha'\beta)}{c''} = e'',$$

et que l'on ajoute les produits ec, $e'c'$, $e''c''$, il viendra par les réductions,

$$ec + e'c' + e''c'' = \alpha\beta' - \alpha''\beta.$$

Cette équation est facile à vérifier, car les produits ec, $e'c'$, $e''c''$, expriment les aires des triangles $AM''M$, $AM''M'$, $MM''M'$, multipliées par 2 ; la somme de ces aires est égale à celle du triangle total AMM', qu'on a désignée par S, et on a

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2S \text{ (97)}.$$

Lorsqu'on a $e = e' = e''$, on obtient sur-le-champ

$$e = \frac{2S}{c + c' + c''},$$

et quand $c = c' = c''$, il vient

$$e + e' + e'' = \frac{2S}{c}.$$

La première de ces expressions est celle du rayon du

cercle inscrit; et la seconde nous fait voir que *si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on abaisse une perpendiculaire sur chacun des côtés de ce triangle, la somme de ces trois lignes sera égale à sa hauteur*, puisqu'en prenant le côté c pour base, et nommant h la hauteur, on a

$$S = \frac{ch}{2},$$

ce qui donne

$$e + e' + e'' = h.$$

On pourroit tirer encore un grand nombre de conséquences de la théorie que je viens d'exposer; mais ce qui précède suffit pour cet ouvrage; et j'observerai qu'il existe pour les polygones rectilignes quelconques des équations analogues aux équations (A) et (B) du numéro 95, qui s'obtiennent de la même manière, et qui conduiroient aux propriétés de ces polygones, comme celles-ci mènent aux propriétés du triangle. Lagrange a donné, sur les pyramides, un Mémoire auquel ceci peut servir de préliminaire, et qu'on étendroit aux polyèdres en faisant usage des formules rapportées dans le cinquième chapitre du premier volume de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*.

101. La combinaison de l'équation de la circonférence du cercle avec celle de la ligne droite, conduit aux diverses propriétés qui résultent de la rencontre de ces lignes, et donne la solution de toutes les questions dans lesquelles l'inconnue ne passe pas le second degré.

Soient $x^2 + y^2 = r^2$, $y - \beta = a(x - \alpha)$, ces deux équations; les employer à la détermination de x et de y, ou les considérer comme renfermant les mêmes inconnues, c'est supposer que les points auxquels appartien-

nent les coordonnées x, y, sont situés en même temps sur la circonférence du cercle et sur la ligne droite proposées, c'est-à-dire, sont les intersections de ces lignes : et en général, il est évident que pour trouver les points de rencontre de deux lignes quelconques, il suffit de supposer que leurs équations ne contiennent que les mêmes inconnues.

En chassant d'abord y par le moyen de sa valeur prise dans la première équation, on trouvera

$$x^2 + (ax + \beta - a\alpha)^2 = r^2.$$

Cette équation du second degré, étant développée, donnera deux valeurs pour x, parce qu'en effet la ligne droite doit rencontrer en général le cercle en deux points; mais on peut arriver à des résultats plus simples, en prenant pour inconnue la distance du point dont les coordonnées sont α et β à l'un des points d'intersection de la droite et du cercle. Si l'on désigne cette distance par z, on aura (84)

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},$$

d'où l'on tirera

$$z^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,$$

et mettant pour $y - \beta$ sa valeur $a(x-\alpha)$, il viendra

$$z^2 = (x-\alpha)^2 (1 + a^2),$$

d'où l'on tirera

$$(x-\alpha) = \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad y - \beta = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}},$$

ce qui donnera

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad y = \beta + \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Substituant ces dernières valeurs dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, on la changera en cette autre :

$$\alpha^2+\frac{2\alpha z}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{z^2}{1+a^2}+\beta^2+\frac{2\beta a z}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a^2z^2}{1+a^2}=r^2,$$

qui se réduit à

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0,$$

et qui fera d'abord connoître z, et ensuite x et y, au moyen des expressions précédentes.

FIG. 38. Il est visible que si le point E, *fig.* 38, est celui dont les coordonnées sont α et β, que MNM' et EM soient le cercle et la droite proposés, a exprimera la tangente de l'angle EeB, et les deux valeurs de z appartiendront aux droites EM et EM'.

102. On sait par la théorie des équations, que le dernier terme est le produit de toutes les racines; si donc on nomme z' et z'' celles de l'équation ci-dessus, on aura

$$z'z''=\alpha^2+\beta^2-r^2,$$

expression qui, ne dépendant point de la quantité a, demeurera la même, quelle que soit cette quantité, c'est-à-dire, quel que soit l'angle EeB dont elle est la tangente; et comme z' et z'' représentent les deux lignes ME et $M'E$, il suit de là que le produit $M'E\times ME$ est le même pour toutes les lignes menées par le point E, ou, que si l'on tire une seconde sécante Em', on aura

$$EM\times EM'=Em\times Em',$$

d'où il résulte que les sécantes EM' et Em' sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures EM et Em, ainsi qu'on le prouve dans les Elémens.

Lorsque le point E est en dehors du cercle, on a

$$\alpha^2+\beta>r^2,$$

puisque $\alpha^2+\beta^2$ exprime le quarré de la distance du

point E au centre A; mais quand ce point est intérieur au cercle, comme le montre la figure 39, z' et z'' sont de signes différens, parce que le dernier terme $\alpha^2+\beta^2-r^2$ devient négatif, à cause de $\alpha^2+\beta^2<r^2$. D'ailleurs, le produit $EM\times EM'$ demeure indépendant de l'inclinaison de la ligne MM', par rapport à AB; et en menant par le point E une seconde corde mm', on a encore FIG. 39.

$$EM\times EM'=Em\times Em',$$

d'où il résulte, comme on le prouve dans les Elémens, que les cordes d'un même cercle se coupent en raison réciproque : et l'on voit que ce théorême et le précédent n'en font, à proprement parler, qu'un seul, puisqu'ils se déduisent de la même équation.

En tirant de l'équation

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

la valeur de z, nous trouverons

$$z'=\frac{-(\alpha+\beta a)+\sqrt{r^2(1+a^2)-(\beta-a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z''=\frac{-(\alpha+\beta a)-\sqrt{r^2(1+a^2)-(\beta-a\alpha)^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

telles sont les expressions des lignes EM et EM'. Elles peuvent être simplifiées en changeant les coordonnées, de manière que les abscisses x et α soient prises sur la droite qui joint le point E avec le centre A du cercle proposé, en partant toujours de ce point, et que les ordonnées y soient perpendiculaires à la droite dont il s'agit : on aura alors

$$\beta = 0, \qquad \alpha = AE,$$

$$x' = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$x'' = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

l'équation au cercle ne changera point, mais celle de la droite EM deviendra

$$y = a(x - \alpha).$$

103. En supposant que le point E soit extérieur au cercle, on aura

$$MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

mais il est visible que cette ligne diminue à mesure que la ligne EM, tournant autour du point E, tend à sortir du cercle, et que les points M et M' finissent par coïncider en N, lorsque cette ligne n'a plus avec le cercle qu'un simple contact. A ce point, on a donc $MM' = 0$, et par conséquent

$$r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2 = 0,$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}},$$

c'est-à-dire, l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle que doit faire avec la ligne AE une ligne EN, menée par le point E, de manière à toucher le cercle.

Nous venons donc de résoudre algébriquement ce problème : *Mener par un point pris hors du cercle, une tangente à ce cercle.*

104. Les mêmes considérations nous serviront aussi à déterminer la tangente menée par un point pris sur la

circonférence du cercle; et pour plus de généralité, nous prendrons ce point d'une manière quelconque. En désignant toujours par α et β ses coordonnées, nous aurons par l'équation du cercle à laquelle ces quantités doivent satisfaire,

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

ce qui réduira l'équation

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

à

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}} z = 0,$$

et dans cet état, elle se décomposera en

$$z = 0, \qquad z + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}} = 0;$$

ses deux racines seront donc

$$z' = 0 \qquad z'' = -\frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}};$$

la différence de ces valeurs, ou la longueur de la partie de la sécante comprise dans le cercle, sera

$$\frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Pour que cette quantité s'évanouisse, il faudra qu'on ait

$$\alpha + \beta a = 0 \qquad \text{ou} \qquad a = -\frac{\alpha}{\beta},$$

résultat qui s'accorde avec ce qu'on démontre dans les Elémens; car la droite menée par le centre du cercle et par le point dont les coordonnées sont α et β, ou le rayon AN, auroit pour équation $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ (83); l'équa-

tion $y-\beta=a(x-\alpha)$ devenant, par la valeur de a trouvée ci-dessus, $y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, représentera la droite perpendiculaire à ce rayon, et passant par le point dont les coordonnées sont α et β, c'est-à-dire, par son extrémité N.

Si l'on vouloit connoître la distance de l'origine A des coordonnées, au point où la tangente $N\,T'$ rencontre l'axe des abscisses, il faudroit, dans l'équation de cette tangente, faire $y=0$, ce qui donneroit

$$-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha) \qquad \text{et} \qquad x=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=\frac{r^2}{\alpha},$$

à cause de $\alpha^2+\beta^2=r^2$.

105. Nous pouvons, par ce qui précède, résoudre la question suivante : *Trouver la position que doit avoir la ligne* EM, *menée par le point donné* E, *pour que la partie* MM' *de cette ligne, comprise dans le cercle, soit d'une grandeur désignée par* m. Afin de parvenir à des expressions plus simples, nous prendrons, comme à la fin du numéro 102, la ligne AE pour axe des abscisses, et en égalant à m la différence des valeurs de z, obtenues dans le numéro 103, nous aurons

$$m=\frac{2\sqrt{r^2(1+a^2)-a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

faisant disparoître les radicaux, il viendra

$$m^2(1+a^2)=4r^2(1+a^2)-4a^2\alpha^2,$$

d'où nous tirerons

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-m^2}}{\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}};$$

substituant cette valeur dans $y=a(x-\alpha)$, nous aurons l'équation de la droite cherchée.

Ce n'est encore là que la solution analytique du problème qui nous occupe ; il faut maintenant construire l'expression ci-dessus. Pour y parvenir, on observera d'abord que le numérateur $\sqrt{4r^2-m^2}$ exprime le côté d'nn triangle rectangle dont $2r$ est l'hypoténuse, et et m le troisième côté. On donnera ensuite au dénominateur $\sqrt{4a^2-4r^2+m^2}$ la forme $\sqrt{4a^2-(4r^2-m^2)}$, équivalente à $\sqrt{4a^2-(\sqrt{4r^2-m^2})^2}$, et qui fait voir que ce dénominateur est aussi le côté d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse $2a$, et pour troisième côté le radical $\sqrt{4r^2-m^2}$, ou le numérateur dont nous venons d'indiquer la construction.

En désignant par q et par p les deux lignes qu'on obtiendra par ces opérations, nous aurons

$$a=\frac{q}{p};$$

et l'équation $y=a(x-\alpha)$ deviendra

$$y=\frac{q}{p}(x-\alpha).$$

Si donc nous prenons sur AE, à partir du point E, une distance $EF=p$, et que par l'autre extrémité de cette distance, nous élevions une perpendiculaire $FG=q$, la droite qui joindra l'extrémité de cette perpendiculaire avec le point E, jouira de la propriété comprise dans l'énoncé de la question, puisque l'angle FEG aura pour tangente trigonométrique $a=\frac{q}{p}=\frac{FG}{EF}$.

106. Il doit être évident, d'après ce qui précède, que les questions de géométrie peuvent être traitées par deux méthodes bien distinctes : l'une consiste à déterminer les équations des lignes qui contiennent les points cherchés,

en partant des propriétés de ces lignes; et l'autre, à déduire immédiatement de la considération des triangles semblables et des triangles rectangles que présente la figure résultante du problème supposé résolu, en s'aidant même de quelque construction préparatoire, les relations des droites qui déterminent la position de ces points.

La première de ces méthodes, quelquefois plus élégante que la seconde, est toujours plus générale; mais la seconde est souvent plus simple; et cela doit être, puisque par celle-ci on prend les choses de moins haut, et qu'on part de propriétés plus voisines de celles qu'on cherche à découvrir (*).

107. L'équation du premier degré ne nous a donné qu'une seule espèce de lignes, savoir la ligne droite; nous avons trouvé que l'équation du cercle étoit du second degré; mais son équation, que nous avons obtenue dans le numéro 90, sous la forme la plus générale, n'est encore qu'un cas particulier de celles du second degré, dont la formule est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F.$$

Il nous reste donc à découvrir les courbes qui répondent aux autres cas de cette formule; nous observerons d'abord qu'on peut, sans en diminuer la généralité, l'écrire ainsi :

(*) J'ai tracé la marche féconde et uniforme de la première de ces méthodes dans la Préface de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*; et les lecteurs qui voudront en connoître plus particulièrement l'application, trouveront de quoi satisfaire leur goût dans le *Recueil de diverses propositions de géométrie*, etc. publié par Puissant, professeur très-recommandable de l'Ecole Centrale du département du Lot.

$y^2 +$

$$y^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}x^2+\frac{D}{A}y+\frac{E}{A}x=\frac{F}{A};$$

et faisant pour abréger

$$\frac{B}{A}=a,\quad \frac{C}{A}=b,\quad \frac{D}{A}=c,\quad \frac{E}{A}=d,\quad \frac{F}{A}=e,$$

il en résultera

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx=e.$$

Le moyen qui s'offre le premier pour déterminer les circonstances du cours des courbes cherchées, c'est d'examiner la marche des valeurs de l'ordonnée, par rapport à celles que l'on peut assigner aux abscisses, et pour cela de résoudre l'équation ci-dessus, par rapport à y. En opérant ainsi, on trouve

$$y=-\tfrac{1}{2}(ax+c)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2}.$$

Développant la quantité qui est sous le radical, et l'ordonnant par rapport à x, il viendra

$$y=\frac{-(ax+c)\pm\sqrt{(4e+c^2)-2(2d-ac)x-(4b-a^2)x^2}}{2}.$$

Faisant pour abréger

$$4e+c^2=p,\qquad 2d-ac=n,\qquad 4b-a^2=m,$$

on aura

$$y=-\frac{ax+c}{2}\pm\frac{\sqrt{p-2nx-mx^2}}{2}.$$

On voit d'abord que la valeur de y est composée de deux parties, dont l'une, exprimée par $-\dfrac{ax+c}{2}$, est l'ordonnée d'une ligne droite ayant pour équation $y=-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}c$, et qui se construit en prenant sur l'axe AC', au dessous de AB, *fig.* 40, une partie $AD=\frac{1}{2}c$, et menant par le point D une droite DE, faisant du côté des x négatifs un angle DEA, dont la tan- FIG. 40.

gente soit égale à $\frac{1}{2}a$ (83); en sorte que AP étant x, PN sera $-\frac{ax+c}{2}$. Il est évident maintenant que pour avoir les points qui appartiennent à la courbe cherchée, il faut porter dans la direction de PN, tant au-dessus qu'au-dessous de la droite ED, des parties NM et NM' égales à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2},$$

puisqu'on aura par ce moyen,

$$PM=-\tfrac{1}{2}(ax+c)+\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2},$$
$$PM'=-\tfrac{1}{2}(ax+c)-\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2}.$$

La droite DE jouit ainsi de la propriété remarquable de partager en deux parties égales les lignes menées parallèlement à AC, entre deux points de la courbe cherchée, et c'est pour cela qu'on lui a donné le nom de *diamètre*; mais il y a cette différence entre la ligne DE et les diamètres du cercle, que ceux-ci rencontrent à angle droit toutes les lignes qu'ils divisent en deux parties égales, tandis que la première le fait obliquement: cependant nous montrerons bientôt que ces deux circonstances dérivent d'une même loi.

108. L'équation ci-dessus se simplifieroit beaucoup en prenant pour ordonnées les droites NM et NM', c'est-à-dire en faisant

$$y+\frac{ax+c}{2}=u:$$

il viendroit alors

$$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2};$$

mais les abscisses AP ne seroient plus comptées sur la ligne de laquelle partent les ordonnées. Pour les ramener à cet état, il faut les prendre sur le diamètre DE:

c'est ce qu'on effectuera en posant $DN = t$; et en observant que si l'on tire DG parallèle à AB, on aura

$$DG = DN \cos D = t \cos D.$$

L'angle D est le même que l'angle E, dont la tangente est $\frac{1}{2}a$; son cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+a^2}}$ (28): et puisque $AP = DG$, il en résultera

$$x = \frac{2t}{\sqrt{4+a^2}} \quad \text{ou} \quad x = \gamma t,$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{2}{\sqrt{4+a^2}} = \gamma.$$

La valeur de x étant mise dans celle de u, on trouve l'équation

$$u = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2},$$

qui doit exister entre t et u, ou entre les droites DN et NM, pour chaque point de la courbe, et qui est par conséquent son équation rapportée aux coordonnées DN et NM. Celle-ci, quoique plus simple que

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

est aussi générale, puisque les transformations que nous avons effectuées jusqu'ici n'ont introduit aucune condition particulière.

L'expression de u étant affectée en général d'un radical du second degré, ne sauroit avoir de valeur réelle qu'autant que la quantité $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ sera positive. L'examen de cette circonstance présente plusieurs cas que nous discuterons successivement.

109. Lorsque la quantité que nous avons désignée

par m (107) sera positive, on mettra l'expression $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ sous la forme

$$m\gamma^2\left(\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}t - t^2\right),$$

et l'on n'aura plus à considérer que celle-ci :

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}t - t^2.$$

Les valeurs de t qui la rendront positive ou qui donneront

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}t > t^2,$$

seront nécessairement moindres que celles qui satisfont à

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}t = t^2,$$

ou à $$t^2 + \frac{2n}{m\gamma}t - \frac{p}{m\gamma^2} = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient

$$t = -\frac{n}{m\gamma} \pm \sqrt{\frac{p}{m\gamma^2} + \frac{n^2}{m^2\gamma^2}}$$

$$= \frac{1}{m\gamma}(-n \pm \sqrt{pm + n^2}).$$

Lorsque ces valeurs ont lieu, celles de u sont nulles : il suit de-là qu'elles indiquent les points où la courbe rencontre le diamètre DE. Pour trouver ces points, il faut prendre sur DE, du côté négatif, une partie DO égale à $\frac{n}{m\gamma}$, puis porter sur la même ligne, de chaque côté du point O, des distances OI et OI', égales à $\frac{1}{m\gamma}\sqrt{pm + n^2}$; car on aura

$$DI = -\frac{n}{m\gamma} + \frac{1}{m\gamma}\sqrt{pm+n^2},$$

$$DI' = -\frac{n}{m\gamma} - \frac{1}{m\gamma}\sqrt{pm+n^2}.$$

Au-delà des points I et I', la quantité

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}t - t^2$$

devenant négative, les ordonnées u seront imaginaires, la courbe n'aura aucun point correspondant aux abscisses plus grandes que DI et DI'; elle sera donc renfermée dans l'espace compris entre les lignes IH et $I'H'$ menées par les points I et I' parallèlement aux ordonnées.

Le point O, correspondant à l'abscisse DO, et qui partage l'espace II' ou le diamètre, en deux parties égales, a reçu, à cause de cette propriété, le nom de *centre*.

Si l'on y transporte l'origine des abscisses, on fera disparoître dans l'expression de u le terme multiplié par la première puissance de t, ce qui simplifiera encore cette expression. En effet, on aura

$$DN = ON - DO = CN - \frac{n}{m\gamma},$$

et représentant ON par s, il en résultera

$$t = s - \frac{n}{m\gamma},$$

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2\left\{\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}\left(s-\frac{n}{m\gamma}\right) - \left(s-\frac{n}{m\gamma}\right)^2\right\}}$$

Cette dernière expression de u, développée et réduite revient à

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2\left\{\frac{pm+n^2}{m^2\gamma^2} - s^2\right\}}.$$

Maintenant, si, pour abréger, nous faisons

$$\frac{pm+n^2}{m^2\gamma^2}=A^2,$$

nous aurons enfin

$$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2(A^2-s^2)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}\,.\sqrt{A^2-s^2}.$$

Le degré de simplicité de cette équation est tel, qu'il est facile de la construire et d'en déduire la forme de la courbe qu'elle représente. En effet, si l'on prend A pour le rayon d'un cercle ayant son centre au point O, s pour l'abscisse, le facteur $\sqrt{A^2-s^2}$ exprimera l'ordonnée de ce cercle, élevée perpendiculairement à OI. A l'égard du facteur $\frac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}$, il ne doit représenter qu'un rapport, si l'on veut avoir égard à l'homogénéité des expressions (67); nous le représenterons donc par $\frac{B}{A}$, et nous aurons par conséquent

$$\frac{B^2}{A^2}=\tfrac{1}{4}m\gamma^2, \qquad B^2=\frac{mp+n}{4m},$$

d'où nous tirerons

$$u=\pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2-s^2}.$$

Nous voyons ainsi que l'ordonnée NM s'obtiendra en cherchant le quatrième terme de la proportion

$$A:B::\sqrt{A^2-s^2}:u.$$

Lorsqu'on aura déterminé la grandeur de u, on la portera le long de la ligne MM', tant au-dessus qu'au-dessous de DE, à cause du signe $\pm$.

Il est évident que la courbe résultante de cette construction sera fermée comme le cercle, et ne s'étendra que dans l'espace compris depuis $s=A$ jusqu'à $s=-A$, puisqu'au-delà de ces limites, le radical ou l'ordonnée du cercle sera imaginaire.

La plus grande valeur que puisse avoir l'ordonnée u, est visiblement celle qui répond au point O, pour lequel $s=0$; on a dans ce cas

$$u=\pm B:$$

prenant donc les droites OL et OL' égales à B, les points L et L' seront les limites de la courbe dans le sens de ses ordonnées, comme les points I et I' le sont dans celui des abscisses.

110. Il est important de remarquer que si la quantité représentée par A^2 étoit négative, le radical $\sqrt{A^2-s^2}$ demeureroit toujours imaginaire, et l'équation proposée ne sauroit exprimer alors aucune ligne. En remontant à la valeur de A^2, qui est $\frac{pm+n^2}{m^2\gamma^2}$, on verra qu'elle seroit négative si p étoit affecté du signe —, et qu'on eût en même temps $pm>n^2$.

Si l'on avoit alors $pm=n^2$, l'équation $u=\frac{B}{A}\sqrt{A^2-s^2}$ se réduisant à

$$u=\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}\,.\sqrt{-s^2}=\tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{-m},$$

puisque $\frac{B}{A}=\frac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}$ (109), on y satisferoit en faisant $u=0$, $s=0$; on peut dire par conséquent que, dans ce cas, la courbe se réduit au seul point O, où $u=0$, $s=0$, et que ce point est la limite vers laquelle tendent, à mesure que les diamètres II' et LL' diminuent, les courbes données par l'équation ci-dessus.

En élevant au quarré les deux membres de l'équation

$$u=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2\gamma^2}-s^2\right)},$$

elle se change en

$$u^2 = \tfrac{1}{4} m\gamma^2 \left(\frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2} - s^2 \right),$$

et en $\quad 4mu^2 + m^2\gamma^2 s^2 - pm - n^2 = 0.$

Lorsque p est négatif elle devient

$$4mu^2 + m^2\gamma^2 s^2 + pm - n^2 = 0;$$

et quand $pm > n$ son premier membre étant la somme de trois quantités essentiellement positives, puisqu'on suppose que m est aussi positive, ne peut devenir nul que dans le cas où l'on auroit séparément les trois équations

$$4mu^2 = 0, \quad m^2\gamma^2 s^2 = 0, \quad pm - n^2 = 0.$$

On peut satisfaire aux deux premières en faisant $u = 0$, $s = 0$; mais la dernière exprime une condition sans laquelle la proposée est tout-à-fait absurde

111. Supposons à présent que m soit négative; la quantité $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ deviendra

$$p - 2n\gamma t + m\gamma^2 t^2 = m\gamma^2 \left\{ \frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t + t^2 \right\};$$

on fera disparoître le terme $-\frac{2n}{m\gamma} t$, en prenant $t = s + \frac{n}{m\gamma}$; et la quantité $\frac{n}{m\gamma}$, qui représente DO,

FIG. 41. *fig.* 41, ayant ici le signe $+$, se portera sur la partie DF, affectée aux abscisses positives. On aura ainsi le centre O, et l'équation proposée deviendra

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{m\gamma^2 \left(\frac{pm - n^2}{m^2\gamma^2} + s^2 \right)};$$

posant $\frac{pm - n^2}{m^2\gamma^2} = \pm A^2$, selon que la quantité $pm - n^2$ sera positive ou négative, et faisant toujours $\frac{1}{4} m\gamma^2 = \frac{B^2}{A^2}$, on obtiendra

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{s^2 \pm A^2}.$$

Cette équation paroît renfermer deux cas distincts; elle n'en contient cependant qu'un seul; car si on élève ses deux membres au quarré, on en déduira

$$u^2 = \frac{B^2}{A^2}(s^2 \pm A^2),$$

d'où
$$A^2 u^2 - B^2 s^2 = A^2 B^2,$$
$$B^2 s^2 - A^2 u^2 = A^2 B^2.$$

Ces deux dernières ne diffèrent l'une de l'autre que parce que dans la seconde, A et u tiennent la place qu'occupent B et s dans la première, et réciproquement; il suffit donc d'examiner ce que signifie l'une d'elles.

Considérons en particulier la seconde: on en tire

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{s^2 - A^2};$$

l'ordonnée u se construit en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes

$$A, \quad B \quad \text{et} \quad \sqrt{s^2 - A^2}.$$

La dernière est une moyenne proportionnelle entre $s - A$ et $s + A$, et ne se trouve réelle qu'autant que $s > A$. La courbe cherchée n'a donc, depuis $s = 0$ jusqu'à $s = +A$, et depuis $s = 0$ jusqu'à $s = -A$, aucune ordonnée réelle; et comme $s = A$ et $s = -A$ donnent également $u = 0$, il en résulte que cette courbe rencontre le diamètre DE aux points I et I', où se terminent les abscisses OI et OI' égales à A, mais qu'elle ne s'étend point entre les droites IH et $I'H'$.

Au-delà des points I et I', on a $s > A$, soit positivement, soit négativement, l'ordonnée u augmente sans cesse; rien ne limite la grandeur à laquelle elle peut

atteindre. D'après ces considérations, il est visible que le cours de la courbe est pareil à celui des lignes KIk, $K'I'k'$, séparées par l'intervalle II', et dont les branches IK et Ik, $I'K'$ et $I'k'$, s'étendent à l'infini.

Si nous considérions cette courbe par rapport à la droite LL', c'est-à-dire en prenant u pour l'abscisse, et s pour l'ordonnée, son équation donneroit

$$s = \pm \frac{A}{B} \sqrt{u^2 + B^2}.$$

Dans cette forme, s ne sauroit devenir moindre que OI et OI', et la courbe ne rencontre point son diamètre LL'. Il est évident par-là que l'équation

$$A^2 u^2 - B^2 s^2 = A^2 B^2,$$

conduisant aussi à

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{s^2 + A^2},$$

doit appartenir à une courbe QLq, $Q'L'q''$ de la même espèce que KIk, $K'I'k'$, mais tournée par rapport au diamètre LL' des u; comme celle-ci l'est par rapport au diamètre II' des s.

112. Si l'on avoit $A = 0$ ou $pm' - n^2 = 0$ (111), l'expression de u se réduiroit à $u = \frac{1}{2} \sqrt{m \gamma^2 s^2}$, et donneroit les deux équations distinctes

$$u = \tfrac{1}{2} \gamma s \sqrt{m}, \qquad u = -\tfrac{1}{2} \gamma s \sqrt{m},$$

qui ne représentent que deux lignes droites menées par le point O. Pour les construire on prendra à volonté une abscisse OR; il viendra

$$u = \pm \tfrac{1}{2} OR . \gamma \sqrt{m},$$

et portant ces valeurs de R en S et en S', on tirera OS et OS', qui seront les droites demandées.

Comparons à ces droites la courbe KIL, en prenant pour une abscisse quelconque $ON = S$, la différence MV des ordonnées correspondantes NM et NV. La première étant exprimée par

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}\,.\,\sqrt{s^2-A^2} \text{ ou } \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}.\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}},$$

et la seconde par

$$\tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m},$$

nous aurons

$$MV = \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m} - \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}.\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}\left\{1-\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}}\right\}.$$

La différence $1-\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}}$ devient plus facile à apprécier lorsqu'on développe l'expression $\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}}$: or la racine du premier terme 1, étant 1, on fera

$$\sqrt{1-\frac{A^2}{s^2}} = 1+z$$

et on aura

$$1-\frac{A^2}{s^2} = 1+2z+z^2;$$

mais plus on supposera s considérable, plus la fraction $\frac{A^2}{s^2}$ sera petite, et moins la racine $1+z$ différera de l'unité. En négligeant donc, suivant la méthode donnée en Algèbre, n° 215, z^2 dans l'équation ci-dessus, on aura

$$z = -\frac{A^2}{2s^2}.$$

Pour approcher ensuite davantage de cette valeur, on fera $z = -\frac{A^2}{2s^2} + z'$, et on calculera semblablement z', qu'on trouvera $-\frac{A^4}{8s^4}$ et ainsi de suite (*). On trouvera donc

$$MV = \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}\left\{1 - 1 + \frac{A^2}{2s^2} + \frac{A^4}{8s^4} + \&c.\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{m}\left\{\frac{A^2}{2s} + \frac{A^4}{8s^3} + \&c.\right\};$$

d'où on voit que plus s augmentera, plus MV diminuera, mais sans pouvoir jamais devenir nulle.

Il suit de-là que plus la courbe s'éloigne du point O, plus elle s'approche des droites OS et OS', sans néanmoins pouvoir les rencontrer ; en sorte que ces droites sont les limites des parties KIk et $K'I'k'$ de la courbe proposée, qui ne peuvent jamais sortir de l'angle SOS', et de son opposé au sommet.

113. Il ne nous reste plus à examiner que le cas où $m = 0$, dans lequel on a simplement

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2n\gamma t}.$$

On réduit la quantité qui est sous le radical à un seul terme, en faisant

$$\frac{p}{2n\gamma} - t = s \text{ ou } t = \frac{p}{2n\gamma} - s;$$

on a par ce moyen,

$$u = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2n\gamma s} \quad \text{ou} \quad u = \pm\sqrt{Cs},$$

en représentant $\frac{1}{2}n\gamma$ par C. On voit aisément que cette

(*) On peut aussi tirer ce développement de la formule du binome.

équation donne $u = o$ en même temps que $s = o$, et que par conséquent le point du diamètre DE, *fig.* 42, sur lequel on a pris l'origine des s, appartient à la courbe cherchée. Pour trouver ce point il faut faire $s = o$ dans l'équation FIG. 42.

$$t = \frac{p}{2n\gamma} - s,$$

posée ci-dessus; on trouve $t = \frac{p}{2n\gamma}$, et en portant cette quantité sur DE du côté des abscisses positives, on aura le point I, où la courbe proposée rencontre DE.

Si la quantité C est positive, on ne pourra prendre s que positivement; mais rien ne limitera sa grandeur, non plus que celle de u, en sorte que la courbe doit s'étendre à l'infini de ce côté seulement, ainsi que le marque la ligne RIr. Elle seroit tournée du côté opposé si C étoit négatif, parce qu'il faudroit alors prendre s négativement.

L'équation $u = \pm\sqrt{Cs}$ se construit en prenant une moyenne proportionnelle entre l'abscisse $IN = s$ et une droite égale à C; le résultat est l'ordonnée NM, qu'il faut, ici comme dans les cas précédens, porter tant au-dessus de DE qu'au-dessous.

114. L'équation générale du second degré, à deux indéterminées, ne nous fournit donc que ces trois formes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - s^2} \\ u = \pm\frac{B}{A}\sqrt{s^2 - A^2} \\ u = \pm\sqrt{Cs} \end{array}\right\} \text{ou, en faisant disparoître les radicaux,} \left\{\begin{array}{r} A^2u^2 + B^2s^2 = A^2B^2 \\ B^2s^2 - A^2u^2 = A^2B^2 \\ u^2 = Cs, \end{array}\right.$$

selon que m est positive, ou négative, ou nulle; elles répondent, dans l'équation

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

aux cas où la quantité $4b - a^2$ est positive, négative, ou nulle; elles sont comprises aussi dans la seule équation $u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p - 2nt - m\gamma^2 t^2}$.

Les courbes représentées par la première, qui rentrent sur elles-mêmes et qui comprennent un espace fermé de toutes parts (109), sont désignées sous le nom d'*ellipses*. Celles que donne la seconde, composée de quatre branches infinies formant deux parties séparées (111), se nomment *hyperboles*, et les droites entre lesquelles elles sont renfermées (112), *asymptôtes*. Enfin la troisième équation est celle des *paraboles* (113).

115. Chacune de ces équations paroît réduite à la forme la plus simple; mais les coordonnées n'y sont pas perpendiculaires entre elles comme dans les équations de la ligne droite et du cercle dont nous avons fait usage jusqu'à présent : cependant la situation des ordonnées est liée à celle des abscisses par la condition que les premières sont parallèles à la droite qui touche la courbe à l'extrémité de son diamètre. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les points M et M', *fig.* 40, 41 et 42, se confondent en un seul au point I, circonstance qui forme le caractère essentiel des points de contact (103). En effet, la somme des deux ordonnées, ou la distance des points M et M', étant exprimée par $\frac{2B}{A}\sqrt{A^2 - s^2}$ pour l'ellipse, par $\frac{2B}{A}\sqrt{s^2 - A^2}$ pour l'hyperbole, et enfin par $2\sqrt{Cs}$ pour la parabole, devient nulle au point I, où l'on a $s = A$ pour les deux premières courbes, et $s = 0$ pour la troisième.

L'équation des ellipses étant symétrique par rap-

port aux deux indéterminées s et u, de manière que l'expression de s en u a la même forme que celle de u en s, on pourroit prendre aussi les u pour abscisses, et les s pour ordonnées, et on verroit que le diamètre II', *fig.* 40, est lui-même parallèle à la tangente menée par le point L. Les droites II' et LL' jouissant toutes deux des mêmes propriétés, se nomment pour cette raison *diamètres conjugués*. Il est évident que dans le cercle, les diamètres conjugués doivent être perpendiculaires entre eux, puisque la tangente menée à l'extrémité d'un diamètre quelconque lui est perpendiculaire : le nombre des diamètres qui jouissent de cette propriété est infini pour le cercle. Il n'en est pas de même de l'ellipse ; mais quoique, pour cette courbe, l'analyse précédente ne nous ait fait découvrir que deux diamètres conjugués, se coupant obliquement, elle en a néanmoins toujours deux qui se rencontrent à angle droit, ainsi que nous le prouverons plus bas. FIG. 40.

Si l'on rapproche ce que nous venons de faire sur l'équation générale du second ordre, de ce qu'on a vu dans les numéros 83 et 90 pour la ligne droite et pour le cercle, on reconnoîtra que l'équation d'une même ligne prend des formes très-différentes, suivant les coordonnées auxquelles on la rapporte. Il peut donc être utile de savoir changer ces coordonnées, afin de pouvoir passer à celles qui donnent pour la ligne proposée, l'équation la plus simple : nous allons chercher en conséquence les formules générales pour changer les coordonnées d'une courbe en d'autres situées d'une manière quelconque, tant par rapport aux premières qu'entre elles.

116. Le plus grand changement qu'on puisse apporter dans le système des coordonnées, sans cesser de les prendre droites et respectivement parallèles à deux lignes

Telles sont les valeurs les plus générales que puissent prendre les coordonnées x et y, faisant entre elles un angle quelconque, lorsqu'on les exprime par d'autres coordonnées du même genre, mais situées comme on voudra. Voyons maintenant comment on en déduit celles qui conviennent aux différens cas particuliers qui peuvent se présenter.

1°. Si on supposoit les nouvelles coordonnées parallèles aux premières, et qu'on ne fît que changer la position de l'origine, les lignes $A'''C''$ et $A'''C'$ se confondroient, ainsi que $A'''B''$ et $A'''B'$; on auroit par conséquent

$$m=1, \qquad n=0, \qquad p=0, \qquad \text{et} \qquad q=1,$$

et il en résulteroit

$$x=t+a, \qquad y=u+b,$$

ce qu'il est facile de voir *à priori*, puisqu'alors $A'''P''$ et $A'''P'$ se confondroient, ainsi que $P''M$ et $P'M$.

En égalant à zéro ou a ou b, on conservera dans sa place ou l'axe AC, ou l'axe AB.

2°. Si on ne vouloit changer que la direction des axes AB et AC, et qu'on laissât toujours l'origine au point A, les lignes $A'''B'$ et $A'''C'$ tombant dans ce cas sur AB et sur AC, on auroit en même temps

$$a=0 \qquad \text{et} \qquad b=0,$$

ce qui donneroit

$$x=mt+pu, \qquad y=nt+qu.$$

On voit qu'en supposant $m=1$ et $n=0$, d'où il résulteroit $x=t+pu$, $y=qu$, on feroit coïncider la ligne $A'''B''$ avec $A'''B'$, et que par conséquent on n'auroit changé que la direction de l'ordonnée ; on prouveroit de même que $x=mt$ et $y=nt+u$ sont les valeurs de x

et de y, relatives au changement de la direction des abscisses.

117. Il faut observer qu'il y a entre les quantités m, n, p et q, qui dépendent de la direction des nouvelles coordonnées, une relation nécessaire, en sorte qu'on ne peut les prendre toutes les quatre arbitrairement; car si, connoissant l'angle des axes primitifs $A'''B'$ et $A'''C'$ on se donnoit encore les angles $B''A'''B'$ et $C'A'''B''$, la position des nouveaux axes $A'''B''$ et $A'''C''$ seroit entièrement déterminée par ces trois choses. Lorsqu'on passera d'un système connu de coordonnées à un autre système également connu, les quantités m, n, p et q, calculées suivant leurs définitions, auront entre elles la relation dont on vient de parler; mais il suit de ce qui précède, que la position de l'origine étant donnée, on ne peut déterminer la direction des nouveaux axes, de manière à satisfaire à plus deux de conditions différentes, et que dans les expressions $x = mt + pu + a$, $y = nt + qu + b$, les quantités x et y, t et u, ne sauroient être les coordonnées d'un même point relativement à deux systèmes de coordonnées droites et parallèles, tant que m, n, p et q seront quelconques. Voici un moyen très-simple de trouver la relation qui doit exister entre ces quantités.

Si on mène par le point M les droites MG et MH, respectivement perpendiculaires à $A'''B'$ et $A'''B''$, et qu'on suppose connus les angles $MP'B' = C'A'''B'$ et $MP''B'' = C'A'''B''$, on aura le rapport de $P'M$ à $P'G$, et celui de $P''M$ à $P''H$. Nommant g le premier, et h le second, il en résultera

$$P'G = P'M \times g \quad \text{et} \quad P''H = P''M \times h;$$

tirant ensuite $A'''M$, et représentant $A'''P'$ et $P'M$ par

x' et y', les triangles obliquangles $A'''P'M$ et $A'''P''M$ donneront

$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P'}^2+\overline{P'M}^2+2\overline{A'''P'}\times\overline{P'G}=x'^2+y'^2+2gx'y'$$
$$\overline{A'''M}^2=\overline{A'''P''}^2+\overline{P''M}^2+2\overline{A'''P''}\times\overline{P''G}=t^2+u^2+2htu.$$

En égalant ces deux expressions de $\overline{A'''M}^2$, il viendra

$$x'^2+y'^2+2gx'y'=t^2+u^2+2htu;$$

mettant pour x' et y' leurs valeurs $mt+pu$ et $nt+qu$, on aura

$$(m^2+n^2+2mng)t^2+(p^2+q^2+2pqg)u^2+2(mp+nq+g(np+mq))tu$$
$$=t^2+u^2+2htu.$$

Cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la position du point M, il faut qu'elle se vérifie toujours indépendamment de t et de u, condition qui donne les trois équations

$$m^2+n^2+2mng=1, \qquad p^2+q^2+2pqg=1,$$
$$mp+nq+(np+mq)g=h.$$

En chassant g des deux premières, le résultat

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)mn=pq-mn,$$

exprimera les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités m, n, p et q.

On suppose le plus souvent que les nouvelles coordonnées u et t se rencontrent à angle droit, ainsi que les premières; dans ce cas, les équations ci-dessus se simplifient beaucoup. Les angles $MP'B'$ et $MP''B''$ devenant droits, $P'G$ ou gy' et $P''H$ ou hu, s'évanouissent; en sorte qu'on a seulement

$$m^2+n^2=1,$$
$$p^2+q^2=1,$$
$$mp+nq=0,$$

d'où on tire

$$m^2 = 1 - n^2, \qquad p^2 = 1 - q^2,$$
$$m^2 p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2 q^2;$$

et à cause de $mp = -nq$, il vient

$$n^2 + q^2 = 1.$$

Comparant ce résultat avec l'équation $m^2 + n^2 = 1$, on trouve $q = m$, ce qui donne $p = -n$; on a donc enfin

$$x' = mt - nu, \qquad y' = nt + mu,$$

en observant que les quantités m et n dépendent l'une de l'autre, en vertu de l'équation $m^2 + n^2 = 1$.

FIG. 44. La figure 44, construite pour ce cas particulier, fait voir que m est le cosinus de l'angle $B'A'''B''$, que n en est le sinus, et qu'on a

$$A'''P' = A'''R - P''Q = mt - nu,$$
$$P'M = P''R + QM = nt + mu,$$

comme nous venons de le trouver (*).

Pour changer à-la-fois, dans ce cas, l'origine des coordonnées et la direction de leurs axes, il faudra donc prendre

$$x = mt - nu + a, \qquad y = nt + mu + b \quad (116),$$

en ayant égard à l'équation

(*) Rien ne seroit plus aisé que de changer, non-seulement ici, mais encore dans tout ce qui précède, les dénominations des lettres m, n, p et q, en sinus ou cosinus des angles compris entre les axes des coordonnées; et on auroit alors les formules rapportées dans plusieurs ouvrages, *qu'on a publiés après les premières éditions de celui-ci*; mais la notation que j'ai adoptée, abrège les expressions, et conserve mieux l'élégance analytique. C'est sans doute par cette raison que Lagrange et Monge ont généralement préféré, dans les transformations de coordonnées, que renferment leurs écrits, de simples dénominations littérales, aux lignes trigonométriques, que d'ailleurs Euler avoit introduites dans ces calculs dès 1748.

$$m^2 + n^2 = 1 ;$$

et on ne pourra disposer alors que de trois quantités, savoir : a, b et l'une des quantités m et n.

118. Voyons maintenant quelles simplifications on peut apporter à l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F, \qquad (1)$$

par le moyen de la transformation des coordonnées, en ne cessant pas de les prendre perpendiculaires entre elles.

Si on substitue au lieu de x et de y, les expressions générales du n° précédent, on pourra, au moyen des trois quantités indéterminées qu'elles renferment, satisfaire à trois conditions; et, si on s'en sert pour faire disparoître les trois termes dans lesquels les nouvelles coordonnées se trouveront chacune au premier degré, savoir : ceux qui seront affectés de ut, de t et de u, en égalant à zéro leurs coefficiens, on obtiendra une équation de la forme

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma,$$

semblable aux deux premières du n° 114. Cette forme est remarquable, 1°. en ce que les deux valeurs de u étant égales entr'elles, et de signes différens, il s'ensuit que l'axe des nouvelles abcisses t est un diamètre (107); 2° en ce que chaque valeur de t, prise positivement et négativement, donnant les mêmes valeurs pour u, il en résulte que l'origine des t, placée sur le milieu du diamètre, est le centre de la courbe (109).

Le calcul devient plus simple, lorsqu'au lieu d'effectuer en même temps, par les formules générales, les changemens d'origine et de direction des coordonnées, on transporte d'abord les axes parallèlement à eux-mêmes; pour

cela, mettons dans l'équation ci-dessus $x' + a$ au lieu de x, et $y' + b$ au lieu de y : elle deviendra alors

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 \\ +(2Ab + Ba + D)y' + (2Ca + Bb + E)x' \\ +Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea = F \end{array}\right\} \quad (2).$$

Les quantités a et b étant arbitraires, nous pouvons les déterminer de manière à faire disparoître, de ce résultat, les termes qui contiennent x et y', séparément à la première puissance : en égalant leur coefficient à zéro, on aura

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0, \quad (3);$$

il ne restera plus dans l'équation (2) que les termes affectés de x'^2, $x'y'$, y'^2, et les termes indépendans de x' et de y'. Ces derniers se réduisent à l'aide des équations (3). En effet, multipliant la première par b, la seconde par a, et retranchant leur somme de l'équation (2), après y avoir supprimé les termes qui doivent s'évanouir, il viendra

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 - Ab^2 - Bab - Ca^2 = F. \quad (4)$$

Plaçons à présent les axes des coordonnées dans une nouvelle direction, mais toujours à angle droit, en prenant (n°. précéd.).

$$x' = mt - nu,$$
$$y' = nt + mu.$$

Nous pouvons faire disparoître encore un terme de l'équation (4), parce que n'ayant entre les quantités m et n que l'équation $m^2 + n^2 = 1$, il en restera une à déterminer. La substitution des valeurs ci-dessus étant effectuée, on aura

$$\left.\begin{aligned}&[Am^2 - Bmn + Cn^2]u^2\\ &+[2(A-C)mn + B(m^2-n^2)]ut\\ &+[An^2 + Bmn + Cm^2]t^2\\ &-Ab^2 - Bab - Ca^2 = F\end{aligned}\right\} (3)$$

en posant l'équation

$$2(A-C)mn + B(m^2-n^2) = 0,$$

le terme multiplié par tu s'évanouit; et si, pour abréger, on fait

$$Am^2 - Bmn + Cn^2 = \alpha,$$
$$An^2 + Bmn + Cm^2 = \beta,$$
$$F + Ab^2 + Bab + Ca^2 = \gamma,$$

il viendra $\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$, d'où on tirera

$$u = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}t^2} = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta} - t^2\right)}.$$

1°. Si les quantités α, β, γ, sont toutes trois de même signe, cette équation rentrera dans l'équation

$$u = \pm\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - s^2},$$

rapportée dans le numéro 114 pour celle de l'ellipse; mais ici les coordonnées u et t étant perpendiculaires entre elles, il s'ensuit que la courbe cherchée sera une ellipse rapportée à des diamètres II' et LL', *fig.* 45, perpendiculaires entre eux, et que, pour cette raison, on nomme *axes*. FIG. 45.

Lorsque la quantité γ est d'un signe différent de celui des deux autres, l'équation devient absurde, comme on l'a remarqué dans le n° 110.

2°. Quand α et β sont de signes différens, l'équation ne peut avoir que ces deux formes :

$$\alpha u^2 - \beta t^2 = -\gamma$$
$$\alpha u^2 - \beta t^2 = \gamma;$$

la première appartient à une hyperbole rapportée aussi à

un diamètre qui rencontre ses ordonnées à angles droits, c'est-à-dire, à un axe, *fig.* 47, puisqu'on a

FIG. 47.

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 - \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$u = \pm \frac{B}{A}\sqrt{s^2 - A^2}$$

du n°. 114.

C'est encore à l'hyperbole que se rapporte l'équation

$$\alpha u^2 - \beta s^2 = \gamma,$$

mais alors l'axe des abscisses est LL', et non pas II'; car il vient dans ce cas

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 + \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

résultat qui est de la forme $u = \pm \frac{B}{A}\sqrt{s^2 + A^2}$.

Nous observerons que, par rapport à l'hyperbole KIk, $K'I'k'$, la ligne LL' est aussi un diamètre. Quoiqu'elle ne soit pas une double ordonnée comme dans l'ellipse, on lui assigne une grandeur, savoir celle qui résulteroit de la supposition de $t = 0$, en changeant le signe de la quantité négative $\frac{\gamma}{\beta}$; et il vient

$$OL = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

On conserve de cette manière l'analogie entre l'équation de l'ellipse et celle de l'hyperbole.

Le diamètre LL' de l'hyperbole, est nommé *second diamètre*, pour le distinguer du *diamètre* II', qui coupe la courbe, et que, par cette raison on appelle aussi *diamètre transverse*.

On n'auroit que deux lignes droites, comme dans le n° 112, si $\gamma = 0$.

119. Pour savoir dans quels cas les quantités α et β sont positives ou négatives, il faut déterminer m et n, et substituer leurs valeurs dans celles de ces quantités. L'équation

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0,$$

donne

$$mn = \frac{B(m^2 - n^2)}{2(C - A)};$$

si on fait $\frac{B}{2(C-A)} = \delta$, qu'on élève au quarré, et qu'on chasse n^2, au moyen de l'équation $m^2 + n^2 = 1$, il viendra

$$m^4 - m^2 = -\frac{\delta^2}{1 + 4\delta^2},$$

d'où on tirera

$$m^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\delta^2}{1+4\delta^2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}},$$

puis

$$n^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1+4\delta^2}},$$

$$m^2 n^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+4\delta^2)} = \frac{\delta^2}{1+4\delta^2};$$

remettant, au lieu de δ, la quantité qu'il représente, et n'ayant égard qu'au signe supérieur des radicaux, il en résultera

$$m^2 = \frac{1}{2} + \frac{C - A}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}},$$

$$n^2 = \frac{1}{2} - \frac{C - A}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}},$$

$$mn = \frac{B}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de α et de β, et en les réduisant ensuite au même dénominateur, on verra, avec un peu d'attention, que leurs numérateurs sont divisibles par $\sqrt{(C-A)^2+B^2}$, et que

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(C+A)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2},$$
$$\beta=\tfrac{1}{2}(C+A)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2}.$$

Lorsque la quantité $C+A$ est positive, β est toujours positif, et α l'est aussi, quand

$$C+A>\sqrt{(C-A)^2+B^2},$$

ce qui revient à

$$(C+A)^2>(C-A)^2+B^2,$$
ou à $$2AC>-2AC+B^2,$$
ou à $$4AC>B^2.$$

Si la quantité $C+A$ étoit négative, α seroit nécessairement négatif, et β le deviendroit, si l'on avoit, comme ci-dessus, $4AC>B^2$. On voit donc que, lorsque cette dernière condition est remplie, α et β sont de même signe, mais que, dans le cas contraire, ils sont de signes différens.

Nous remarquerons que $4AC-B^2=A^2\left(4\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)$, et que si dans cette expression l'on change, comme dans le n°. 107, $\frac{B}{A}$ en a, et $\frac{C}{A}$ en b, on aura $A^2(4b-a^2)$, dont le signe dépendra de celui de la quantité $4b-a^2$, que nous avons représentée par m dans ce numéro, et d'après laquelle nous avons reconnu les diverses formes qui caractérisent les trois espèces de courbes comprises dans l'équation générale du second degré (114).

120. Si l'on avoit $4AC=B^2$, la quantité α s'anéanti-

roit, et par-là l'équation $u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta} - t^2\right)}$

ne donneroit pour l'ordonnée u qu'une valeur infinie; mais les valeurs des quantités a et b, tirées des équations (3), et qui sont en général

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

devenant infinies lorsque $B^2 = 4AC$, ne font plus rien connoître : on ne peut donc, dans ce cas, faire disparoître à-la-fois les termes Dy et Ex dans l'équation (1). Pour parer à cet inconvénient, nous ferons immédiatement dans cette équation, $x = mt - nu, y = nt + mu$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} [Am^2 - Bmn + Cn^2]u^2 \\ +[2(A-C)mn + B(m^2 - n^2)]ut \\ +[An^2 + Bmn + Cm^2]t^2 \\ +(Dm - En)u + (Dn + Em)t = F \end{array}\right\} (6),$$

et nous poserons encore l'équation

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0,$$

afin de chasser le terme multiplié par ut. Les coefficiens de u^2 et de t^2 auront ici les mêmes valeurs que dans le numéro précédent, puisque m et n dépendent encore des mêmes équations que ci-dessus; en représentant donc ces coefficiens par α et β, nous obtiendrons

$$\alpha u^2 + \beta t^2 + (Dm - En)u + (Dn + Em)t = F \quad (7).$$

Lorsque α ou $\beta = 0$, cette équation se réduisant à l'une des formes $\beta t^2 + (Dm - En)u + (Dn + Em)t = F$,

$$\alpha u^2 + (Dm - En)u + (Dn + Em)t = F,$$

ne contiendra plus qu'un seul terme du second degré. Pour la simplifier, il reste encore à changer l'origine

des coordonnées, en substituant $t' + a'$ à t et $u' + b'$ à u, ce qui introduira deux quantités indéterminées, dont on pourra disposer pour faire disparoître le terme indépendant des nouvelles coordonnées t' et u', et le terme multiplié par t' dans le premier cas, ou celui qui est multiplié par u' dans le second; les résultats seront de l'une ou de l'autre de ces formes :

$$\beta t'^2 - \varepsilon u' = 0, \qquad \alpha u'^2 - \varepsilon t' = 0.$$

Il est bon d'observer qu'elles rentrent l'une dans l'autre en y changeant u' en t', et t' en u', et que l'origine des abscisses est alors sur un point de la courbe, puisqu'on a en même temps $t' = 0$, $u' = 0$ (81).

Pour donner plus de généralité aux résultats de la substitution indiquée ci-dessus, faisons-la dans l'équation (7), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} \alpha u'^2 + \beta t'^2 + (2\alpha b' + Dm - En)u' \\ \qquad\qquad + (2\beta a' + Dn + Em)t' \\ + \alpha b'^2 + \beta a'^2 + (Dm - En)b' + (Dn + Em)a' \end{array}\right\} = F.$$

Supposons qu'on veuille ôter les termes multipliés par u' et ceux qui ne dépendent point des coordonnées u' et t'; il faudra poser les équations

$$2\alpha b' + Dm - En = 0,$$
$$\alpha b'^2 + \beta a'^2 + (Dm - En)b' + (Dn + Em)a' - F = 0,$$

et faisant, pour abréger,

$$2\beta a' + Dn + Em = -\varepsilon,$$

on aura l'équation

$$\alpha u'^2 + \beta t'^2 - \varepsilon t' = 0,$$

qui, lorsque $\beta = 0$, se rédnit à

$$\alpha u'^2 - \varepsilon t' = 0,$$

et donne

$$u' = \mp \sqrt{\frac{\iota}{\alpha}}\, t' :$$

elle se rapporte donc à la parabole (114).

Les équations qui déterminent a' et b', deviennent alors

$$2\alpha' + Dm - En = 0$$
$$\alpha b'^2 + (Dm - En) b' + (Dn + Em) a' - F = 0;$$

et, si de la seconde on retranche la première, multipliée par b', on aura

$$-a' b'^2 + (Dn + Em) a' - F = 0,$$

équation qui donnera fort simplement la valeur de a'.

121. Nous devons être maintenant convaincus que l'équation (1) ne renferme que les trois espèces de courbes que nous avons déjà reconnues d'une autre manière, et que nous avons désignées sous le nom d'*ellipses*, *d'hyperboles*, et de *paraboles* (114).

Le cercle est implicitement compris dans l'espèce de l'ellipse; il répond au cas où l'on a $\alpha = \beta$, ce qui change l'équation $\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$ (118), en cette autre :

$$u^2 + t^2 = \frac{\gamma}{\beta},$$

qui appartient évidemment au cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées u et t, et dont le rayon est $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, pourvu toutefois que les coordonnées soient perpendiculaires, comme nous le supposons ici.

Nous ferons observer aussi que l'équation

$$\alpha u'^2 + \beta t'^2 - \varepsilon t' = 0,$$

obtenue ci-dessus, est commune à l'ellipse, à l'hyperbole et à la parabole. On a la première courbe lorsque α et β

sont de même signe, la seconde lorsqu'ils sont de signes différens, et la troisième enfin lorsque $\beta = 0$.

Le point de la courbe sur lequel se trouve l'origine des coordonnées, étant placé à l'une des extrémités de l'axe, se nomme le *sommet*. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole il y deux sommets, marqués I et I', dans les figures 45 et 47. La parabole n'en ayant qu'un seul, fig. 48, n'a point de centre; et c'est pour cela que son équation ne sauroit prendre la forme

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma.$$

La construction des expressions de α, β et γ, fournit le moyen de trouver les axes des courbes du second degré, lorsqu'on en a une équation quelconque en coordonnées rectangles.

Il arrive souvent que l'on cherche quelle est la courbe douée d'une propriété particulière qu'on ignore appartenir à une courbe déjà connue; mais alors l'équation relative à cette propriété rentre dans quelques-unes des équations déjà discutées : c'est ce que montreront les questions suivantes :

122. *Trouver l'équation d'une courbe telle, que si l'on*
FIG. 45. *mène de chacun de ses points* M, fig. 45, *à deux points fixes*, F *et* F', *les droites* MF *et* MF', *la somme de ces lignes soit égale à une ligne donnée*

Si on représente par $2a$ la ligne donnée, par $2c$ la distance FF' des points fixes, en prenant pour origine des coordonnées le point O, milieu de FF', en sorte que $OF = OF' = c$, et faisant $OP = x$, $PM = y$, on trouvera

$$FP = c - x, \qquad F'P = c + x.$$

Les triangles PMF, PMF', rectangles en P, donnant

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}, \qquad MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2},$$

on obtiendra

$$MF=\sqrt{(c-x)^2+x^2}, \qquad MF'=\sqrt{(c+x)^2+y^2}.$$

mais en posant $MF=z$, il viendra $MF'=2a-z$, puisque par l'énoncé on a, sur toute la courbe cherchée,

$$MF+MF'=2a;$$

on aura par conséquent

$$z=\sqrt{(c-x)^2+y^2}, \qquad 2a-z=\sqrt{(c+x)^2+y^2}.$$

En élevant au quarré pour faire disparoître les radicaux, il en résultera

$$z^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$
$$4a^2-4az+z^2=c^2+2cx+x^2+y^2;$$

retranchant la seconde de ces équations de la première, il restera

$$-4a^2+4az=-4cx,$$

d'où

$$z=\frac{a^2-cx}{a};$$

substituant enfin cette valeur de z dans la première expression de z^2, on parviendra à l'équation cherchée, qui sera, après les réductions,

$$a^4+c^2x^2=a^2c^2+a^2(x^2+y^2).$$

Cette équation n'étant que du second degré, nous apprend que la courbe cherchée ne peut être que l'une de celles que nous avons discutées précédemment; et pour reconnoître à quelle espèce elle appartient, donnons à son équation la forme

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^4-a^2c^2.$$

En la comparant alors avec la formule $\alpha u^2+\beta t^2=\gamma$, après avoir écrit dans cette dernière y et x pour u et t, nous aurons

$$\alpha = a^2, \quad \beta = a^2 - c^2, \quad \gamma = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

d'où nous conclurons qu'elle est celle d'une ellipse, puisque les quantités β, γ et α sont essentiellement positives (118). En posant, pour abréger, $a^2 - c^2 = b^2$, nous aurons

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

d'où nous tirerons

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Les demi-axes OI et OL de cette ellipse sont respectivement a et b; et comme $b^2 = a^2 - c^2$, on tire de là

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

ce qui nous apprend que lorsque l'on ne connoît que les axes II' et LL' d'une ellipse, on peut trouver sur le plus grand des deux, les points F et F', pour lesquels $MF + MF' = II'$, en décrivant du point L, comme centre et d'un rayon égal à la moitié du grand axe II', un arc de cercle; car aux intersections F et F' de cet arc de cercle avec l'axe II', on a

$$OF = OF' = \sqrt{\overline{FL}^2 - \overline{OL}^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

123. L'énoncé du problème que nous venons de résoudre nous offre une nouvelle propriété commune à toutes les ellipses, et donne en même temps un moyen d'en trouver autant de points qu'on voudra, ou même de les décrire d'un mouvement continu. En effet, si l'on prend à volonté une ouverture de compas FM, moindre que OI, que du point F, comme centre, on décrive un cercle avec cette ouverture de compas, et qu'ensuite prenant pour centre le point F', et pour rayon la différence $F'M$ entre le premier rayon FM et l'axe II', on décrive un second cercle, il coupera le premier en deux

points

points M et M', qui appartiendront à l'ellipse. En répétant ce procédé avec diverses ouvertures de compas, on obtiendra de nouveaux points de l'ellipse demandée; et si ces points sont un peu multipliés, on pourra, en les joignant par un trait libre de la main, achever la courbe d'une manière d'autant plus exacte, que les points déterminés seront en plus grand nombre.

Lorsque l'ellipse doit être fort grande, on la trace par un mouvement continu, en fixant aux points F et F' les extrémités d'un cordeau dont la longueur est celle de l'axe II'; on tend ce cordeau par le moyen d'un piquet M que l'on fait glisser le long du même cordeau, jusqu'à ce qu'il se retrouve au point d'où il est parti: alors il a tracé l'ellipse demandée.

L'une et l'autre de ces descriptions est fondée sur ce principe, que *dans toutes les ellipses, la somme des lignes* M F et M F', *qu'on nomme* rayons vecteurs, *menées aux points fixes* F *et* F', *pris sur le grand axe, et qu'on appelle* foyers, *est toujours égale au grand axe*, ainsi que nous l'avons trouvé dans le numéro précédent.

L'équation $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ fournit une construction par points, très-commode dans la pratique. Ayant décrit du centre O de l'ellipse demandée, *fig.* 46, deux demi-cercles, l'un sur le grand axe, et l'autre sur le petit, pris pour diamètres, et mené un grand nombre de rayons ON, ON', &c. on abaissera sur l'axe II' les perpendiculaires PN, $P'N'$, &c. et on mènera par les points R, R', &c. où les rayons ON, ON', &c. rencontrent le plus petit des deux cercles, les droites RM, $R'M'$, &c. parallèles à II'; les points M, M', &c. que ces parallèles détermineront sur les perpendiculaires PN, FIG. 46.

$P'N'$, &c. appartiendront à l'ellipse cherchée. Par l'opération que l'on vient d'indiquer, on n'obtient que la moitié de cette courbe; mais en répétant la construction au-dessous de l'axe II', on l'aura toute entière.

Pour reconnoître l'exactitude de cette construction, il suffit d'observer qu'en vertu du parallélisme des droites RM et II', on a

$$ON : OR :: PN : PM,$$

et que puisque $ON = a$, $OR = b$, $OP = x$, il en résulte

$$PN = \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$a : b :: \sqrt{a^2 - x^2} : PM,$$

d'où $$PM = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = y.$$

124. L'équation $z = \frac{a^2 - cx}{a} = a - \frac{cx}{a}$ peut être considérée comme une équation caractéristique de l'ellipse : elle en fournit une construction très-simple; car en se donnant l'abscisse $OP = x$, *fig.* 45, on obtiendra par les lignes proportionnelles, la quantité $\frac{cx}{a}$; et retranchant cette quantité de a, on aura z ou FM; ensuite du point F, comme centre, et d'un rayon égal à FM, on décrira un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire PM dans un point M appartenant à l'ellipse. Si l'abscisse tomboit dans la partie OI' de l'axe, x devenant négatif, on auroit pour ce cas $z = a + \frac{cx}{a}$.

FIG. 45.

Le système des coordonnées z et x diffère de ceux que nous avons employés jusqu'ici, en ce que l'ordonnée z, au lieu d'être constamment parallèle à une droite donnée, change sans cesse de direction, et n'est assujettie

qu'à passer par un point donné ; aussi l'équation $z = a - \frac{cx}{a}$, quoique du premier degré, n'appartient plus à une ligne droite, comme dans le cas des coordonnées respectivement parallèles à des axes fixes.

On pourroit substituer à l'abscisse OP une nouvelle abscisse FI, comptée toujours sur l'axe II', mais à partir du point F; en désignant cette dernière par x', on auroit

$$x = c - x',$$

puisque $OP = OF - FP$, et il viendroit

$$z = a - \frac{c(c - x')}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{cx'}{a};$$

mettant b^2 au lieu de $a^2 - c^2$, on aura

$$z = \frac{b^2 + cx'}{a}.$$

On introduit le plus souvent l'angle $I'FM$ à la place de l'abscisse x', ce qui se fait en observant que dans le triangle rectangle FMP, on a $FP = FM \cos I'FM$, ou $x' = z \cos I'FM$; nommant donc φ l'angle IFM, on obtiendra

$$z = \frac{b^2 + cz\cos\varphi}{a}, \quad \text{ou} \quad z = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation est d'un grand usage dans l'Application de l'analyse à l'Astronomie ; on la nomme *équation polaire*, comme toutes celles dont les coordonnées partent d'un même point, qu'on appelle *pôle de la courbe.*

125. Nous modifierons dans cet article le problème que nous avons résolu dans le numéro 122, et nous demanderons qu'on ait $MF' - MF = II' = 2a$, *fig.* 47, au lieu de $MF + MF' = 2a$; c'est-à-dire que *la diffé-* FIG. 47.

rence des rayons vecteurs soit constante. En gardant d'ailleurs les dénominations de l'article cité, nous aurons

$$MF=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{PM}^2}= \qquad z=\sqrt{(c-x)^2+y^2},$$

$$MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2}=2a+z=\sqrt{(c+x)^2+y^2},$$

d'où nous tirerons

$$z^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$

$$4a^2+4az+z^2=c^2+2cx+x^2+y^2;$$

retranchant la première de ces équations de la seconde, nous obtiendrons

$$4a^2+4az=4cx \quad \text{ou} \quad z=\frac{cx-a^2}{a};$$

et par cette valeur de z, nous parviendrons à l'équation

$$\left(\frac{cx-a^2}{a}\right)^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$

qui, par le développement, se réduit à

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Dans le cas actuel, où $c>a$, il faut prendre $b^2=c^2-a^2$, ce qui donnera

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

résultat qui se rapporte à la formule $\beta t^2-\alpha u^2=\gamma$; la question proposée conduit donc à l'hyperbole (118), qui jouit par conséquent de cette propriété, *que la différence de ses rayons vecteurs* MF *et* MF', *est égale à l'axe* II', *sur lequel se trouvent les foyers* F *et* F'.

Nous avons déjà fait remarquer que cette courbe n'avoit, à proprement parler, qu'un axe (118), mais que pour conserver l'analogie, on concevoit un second axe LL' mené par le point O, perpendiculairement au premier; b exprime la longueur OL de la moitié de cet axe, et

l'équation $b^2 = c^2 - a^2$, donnant $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, fait voir que pour trouver les foyers F et F', il faut prendre les distances OF et OF' égales à l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur les deux demi-axes OL' et OL.

Dans la suite des diverses hyperboles qu'on obtient en assignant aux demi-axes a et b toutes les valeurs possibles, il en existe une qui est analogue au cercle ; c'est celle qui résulte de la supposition de $a = b$, ou dont les axes sont égaux, et que pour cette raison on nomme *hyperbole équilatère*. Son équation $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$ ne diffère de celle du cercle $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ que par les signes des termes du second membre qui sont contraires entre eux. Les ordonnées des hyperboles quelconques décrites sur le même axe $2a$, ont avec celles de cette courbe le même rapport que les ordonnées de l'ellipse ont avec celle du cercle, puisque l'équation générale des hyperboles est $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, comme celle des ellipses est $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

126. La propriété dont jouissent les foyers F et F' peut servir à la construction de l'hyperbole par points. Pour cela, du point F, comme centre, et d'un rayon FM, qui ne soit pas moindre que FI, mais d'ailleurs quelconque, on décrira un arc de cercle, puis on prendra un rayon $F'M$ plus grand ou moindre que le premier d'une quantité égale à II', et le cercle décrit sur ce dernier, du point F' comme centre, coupera le premier dans deux points M et M' appartenans à l'hyperbole.

Pour décrire une portion quelconque d'hyperbole par un mouvement continu, on assujettit une règle à

tourner autour du point F', on fixe à l'extrémité R de cette règle et au point F, un fil dont la longueur soit moindre que $F'R$ de la quantité II'; on fait ensuite tourner la règle en appuyant contre elle, avec un style M, le fil RMF, de manière qu'il demeure toujours tendu: le style M trace ainsi un arc de courbe qui appartient à l'hyperbole dont l'axe est II', et dont les foyers sont F et F'.

127. L'hyperbole a aussi une équation polaire qui se déduit de l'équation $z = \frac{cx - a^2}{a}$. Si l'on prend d'abord les abscisses à partir du point F, on aura

$$OP = x = OF - FP = c - x',$$

ce qui donnera

$$z = \frac{c^2 - a^2 - cx'}{a},$$

et $z = \frac{b^2 - cx'}{a}$, en mettant b^2 au lieu de $c^2 - a^2$.

Pour introduire l'angle φ, on observera que dans le triangle rectangle PMF, on a

$$PF = MF\cos l'FM \quad \text{ou} \quad x' = z\cos\varphi,$$

de même que pour l'ellipse; et il viendra

$$z = \frac{b^2 - cz\cos\varphi}{a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}.$$

128. Proposons-nous enfin de *trouver l'équation d'une courbe telle, que chacun de ses points soit autant éloigné de la droite* AC, *donnée de position*, fig. 48, *que d'un point fixe* F, *également donné de position.*

FIG. 48.

Si l'on prend sur la droite AB, menée par le point F perpendiculairement à AC, un point I situé au milieu de la distance AF, ce point appartiendra nécessaire-

ment à la courbe cherchée, puisqu'il sera autant éloigné de la droite AC que du point F. Faisant

$$IF=AI=c', \quad IP=x, \quad PM=y,$$

nous aurons, pour un point quelconque M, la distance

$$QM=AP=AI+IP=c'+x;$$

et le triangle rectangle FPM nous donnera

$$MF=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{PM}^2}=\sqrt{(c'-x)^2+y^2},$$

puisque $PF=IF-IP$. En développant, nous trouverons

$$MF=\sqrt{c'^2-2c'x+x^2+y^2};$$

et comme par la nature de la courbe cherchée, on doit avoir $QM=MF$, il en résultera

$$c'+x=\sqrt{c'^2-2c'x+x^2+y^2},$$

d'où on tirera

$$(c'+x)^2=c'^2-2c'x+x^2+y^2:$$

il viendra, après la réduction,

$$2c'x=-2c'x+y^2 \quad \text{ou} \quad y^2=4c'x,$$

équation à la parabole.

129. Pour construire la courbe d'après la propriété que nous venons d'employer à la recherche de son équation, il faut, d'un rayon FM pris à volonté, décrire un cercle, faire $AP=FM$, et mener par le point P, parallèlement à la ligne AC, une droite PM : le point M où cette droite coupera le cercle appartiendra à la parabole demandée; car il est évident que la droite QM étant parallèle et égale à AP, sera égale à FM.

Cette même propriété donne lieu à un mouvement continu par lequel on trace la courbe; pour cela, on place le long de AC, une règle sur laquelle on fait

mouvoir une équerre dont l'un des côtés représente la droite QE; on attache au point F l'extrémité d'un fil dont la longueur est égale à QE, et dont l'autre extrémité est fixée au point E; on tend ce fil par un style en l'appliquant contre le côté QE, et le style décrit une portion de parabole.

130. Si, pour arriver à l'équation polaire, on fait $FM = z$, on aura

$$z = c' + x,$$

et changeant l'origine des abscisses, en prenant FP à la place de IP, c'est-à-dire en faisant $x = c' - x'$, puisque $IP = IF - FP$, il viendra

$$z = 2c' - x';$$

mettant ensuite $FM \cos MFP$, ou $z\cos\varphi$, au lieu de FP ou de x', on aura

$$z = 2c' - z\cos\varphi \quad \text{ou} \quad z = \frac{2c'}{1 + \cos\varphi}.$$

131. La question qui nous a conduits ci-dessus à l'équation de la parabole, peut être modifiée de manière à embrasser les trois courbes du second degré. Il suffit pour cela de l'énoncer ainsi : *Trouver l'équation d'une courbe dans laquelle la distance entre un point quelconque* M *et le point fixe* F, fig. 39, *soit à la distance* MQ *entre le même point* M *et une droite* AC, *donnée de position dans un rapport constant.*

FIG. 39.

Soit $1 : n$ ce rapport, et tirons du point F sur AC la perpendiculaire AB; il est évident que la courbe cherchée rencontre cette droite dans un point I, tel que

$$IF : AI :: 1 : n;$$

en sorte que si on désigne IF par c', il en résultera

$$AI = nc'.$$

Faisant $IP = x$, $PM = y$, il viendra, en vertu du

triangle rectangle PMF, de même que ci-dessus,

$$MF = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

et comme $QM = AP = AI + IP = nc' + x$, on aura

$$\sqrt{(c'-x)^2+y^2} : nc' + x :: 1 : n,$$

d'où on tirera

$$nc' + x = n\sqrt{(c'-x)^2+y^2};$$

élevant au quarré, on obtiendra enfin

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2(n+1)nc'x = 0.$$

Cette équation, d'une forme absolument semblable à l'équation $\alpha n'^2 + \beta t'^2 - \varepsilon t' = 0$, du numéro 121, appartiendra à l'ellipse, à l'hyperbole ou à la parabole, selon qu'on aura $n > 1$, $n < 1$, ou $n = 1$, et montre par conséquent que la propriété qui fait le sujet de la question proposée, est commune aux trois courbes du second degré, par rapport auxquelles la droite AC est nommée *directrice*.

En donnant à l'équation ci-dessus la forme

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)c'x = 0,$$

et en remarquant que plus n augmente, plus les fractions $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ diminuent, on verra que dans la supposition de n infinie, elle doit se réduire à

$$y^2 + x^2 - 2c'x = 0,$$

équation qui est celle d'un cercle dont le rayon est c', et pour lequel l'origine des abscisses est placée à l'une des extrémités du diamètre (90).

132. On peut déduire immédiatement de l'une quelconque des équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

obtenues dans les numéros 122 et 125, une nouvelle équation qui les renferme toutes deux, et qui comprenne aussi l'équation $y^2 = 4c'x$, qui semble d'une forme essentiellement différente de celle des deux autres. Pour cela, il suffit de transporter dans ces équations l'origine des coordonnées à l'un des sommets de la courbe qu'elles représentent. En effet, si, dans la figure 45, on fait $IP = x'$, et $I'P = x'$ dans la figure 47, on aura par la première,

$$x \text{ ou } OP = OI - IP = a - x',$$

et par la seconde,

$$x \text{ ou } OP = I'P - OI' = x' - a.$$

Ces substitutions changeront les équations rapportées ci-dessus en

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2), \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - 2ax');$$

si l on pose $\frac{2b^2}{a} = p$, elles prendront alors la forme

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2), \qquad y^2 = -\frac{p}{2a}(2ax' - x'^2);$$

et l'une ne différera de l'autre qne par le signe de p.

En mettant, au lieu de b^2, sa valeur $a^2 - c^2$, relative à l'ellipse (122), on aura pour cette courbe,

$$p = \frac{2(a^2 - c^2)}{a};$$

mais comme dans le cas actuel c exprime la distance du foyer F au centre O, il faut introduire à sa place la distance IF, comptée de la nouvelle origine des coordonnées; or, si l'on prend $IF = c'$, on aura, fig. 45,

$$c \text{ ou } OF = OI - IF = a - c',$$

et la quantité p deviendra

$$p = \frac{4ac' - 2c'^2}{a}.$$

On trouvera pour l'hyperbole, *fig.* 47,

$$c \text{ ou } OF = I'F - OI' = c' - a,$$

en prenant $I'F = c'$; et puisqu'on a pour cette courbe

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ (125)},$$

il en résultera

$$p = \frac{2(c^2 - a^2)}{a} = \frac{2c'^2 - 4ac'}{a},$$

quantité qui n'est que la précédente prise négativement.

En mettant l'expression $\frac{4ac' - 2c'^2}{a}$ sous la forme $4c' - \frac{2c'^2}{a}$, on voit que plus a augmente, c' restant le même, plus la fraction $\frac{2c'^2}{a}$ diminue, et que par conséquent dans la supposition où a deviendroit infini, elle se réduiroit à $4c'$: on aura donc pour ce cas

$$p = 4c';$$

mais d'un autre côté, l'équation

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2),$$

équivalente à

$$y^2 = p\left(x' - \frac{x'^2}{2a}\right),$$

se réduiroit aussi, par la même raison, à

$$y^2 = px', \quad \text{ou} \quad y^2 = 4c'x',$$

ce qui est l'équation de la parabole.

L'équation $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$ est donc propre

à représenter chacune des courbes du second degré; elle appartiendra à l'ellipse quand p sera positif, à l'hyperbole quand p sera négatif, et à la parabole lorsque a sera infini.

133. La quantité p se nomme le *paramètre*: c'est dans l'ellipse et dans l'hyperbole, une troisième proportionnelle aux deux axes, puisqu'en vertu de l'équation

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a},$$

on a

$$2a : 2b :: 2b : p;$$

et dans les trois courbes du second degré, elle exprime la valeur de la double ordonnée qui passe par le foyer. En effet, à ce point, on a

$$x' = c',$$

et on trouve pour l'ellipse

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ac' - c'^2) = \frac{(4ac^2 - 2c'^2)(2ac' - c'^2)}{2a^2}$$

$$= \frac{(2ac' - c'^2)^2}{a^2},$$

d'où

$$y = \frac{2ac' - c'^2}{a},$$

et par conséquent

$$2y = \frac{4ac^2 - 2c'^2}{a} = p.$$

On obtiendra de même dans l'hyperbole

$$2y = \frac{2c'^2 - 4ac'}{a} = p,$$

et dans la parabole

$$2y = 4c' = p.$$

134. Les équations

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2), \quad y^2 = -\frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$$

expriment une propriété commune à l'ellipse et à l'hyperbole, et qui devient évidente lorsqu'on les met sous la forme

$$\frac{y^2}{x'(2a-x')} = \frac{p}{2a}, \qquad \frac{y^2}{x'(x'-2a)} = \frac{p}{2a},$$

de laquelle il résulte que dans l'une et l'autre courbe, le quarré de l'ordonnée PM est dans un rapport constant avec le produit des lignes IP et $I'P$, qui sont respectivement x' et $2a-x'$ pour l'ellipse, *fig.* 45; x' et $x'-2a$ pour l'hyperbole, *fig.* 47. Ces distances du pied de l'ordonnée à chacun des sommets de la courbe, étant nommées *abscisses*, on dit que *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

En effet, si on désigne par X' une abscisse différente de x', mais toujours comptée du même point, et par Y l'ordonnée correspondante, on aura

$$Y^2 = \frac{p}{2a}(2aX' - X'^2), \qquad Y^2 = \frac{p}{2a}(X'^2 - 2aX')$$

d'où on tirera

$$y^2 : Y^2 :: x'(2a-x') : X'(2a-X')$$

pour l'ellipse,

$$y^2 : Y^2 :: x'(x'-2a) : X'(X'-2a)$$

pour l'hyperbole, en supprimant toutefois dans le dernier rapport de chacune de ces proportions le facteur commun $\frac{p}{2a}$.

L'équation de la parabole $y^2 = px$, étant traitée de la même manière, donne seulement

$$y^2 : Y^2 :: x' : X',$$

ce qui fait voir que *dans la parabole, les quarrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes.*

135. Il résulte de la comparaison des formules rapportées dans les numéros 114, 118-120, qu'il y a pour chaque courbe du second degré, au moins deux systèmes de coordonnées dans lesquels l'équation de cette courbe se présente sous la forme la plus simple; l'un de ces systèmes est celui des axes, et l'autre celui de deux diamètres conjugués: nous allons montrer qu'il y a un nombre infini de systèmes de coordonnées qui jouissent de la même propriété. Pour le faire, nous appliquerons la transformation des coordonnées aux équations relatives aux axes.

Soit premièrement celle de l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, qui revient à

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

nous observerons d'abord qu'il est inutile de déplacer l'origine des coordonnées qu'il faut laisser au centre, et n'ayant à changer que la direction des axes, nous ferons seulement

$$x = mt + pu, \qquad y = nt + qu \text{ (116)}.$$

Nous laisserons indéterminé l'angle que les nouvelles coordonnées doivent faire entre elles, et dont le cosinus est représenté par h (117), et nous ne tiendrons par conséquent aucun compte de l'équation

$$mp + nq + (np + mq)g = h;$$

il n'en sera pas de même des équations

$$m^2 + n^2 + 2mng = 1, \qquad p^2 + q^2 + 2pqg = 1,$$

parce que les coordonnées x et y étant réciproquement perpendiculaires, il en résulte $g = 0$, d'où

$$m^2 + n^2 = 1, \qquad p^2 + q^2 = 1.$$

Des quatre quantités m, n, p et q, il n'en restera donc

que deux dont nous puissions disposer. En faisant la substitution des valeurs de x et de y, dans l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

nous obtiendrons

$$(a^2q^2+b^2p^2)u^2+2(a^2nq+b^2mp)tu+(a^2n^2+b^2m^2)t^2=a^2b^2$$

pour simplifier cette dernière, nous poserons

$$a^2 n q + b^2 m p = 0,$$

ce qui la réduit à

$$(a^2 q^2 + b^2 p^2) u^2 + (a^2 n^2 + b^2 m^2) t^2 = a^2 b^2.$$

Pour comparer cette équation et

$$a'^2 u^2 + b'^2 t^2 = a'^2 b'^2,$$

nous les mettrons sous la forme

$$u^2 + \frac{a^2n^2+b^2m^2}{a^2q^2+b^2p^2} t^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2q^2+b^2p^2}$$

$$u^2 + \frac{b'^2}{a'^2} t^2 = b'^2;$$

elles ne pourront alors devenir identiques, indépendamment de t et de u, que par la supposition de

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{a^2n^2+b^2m^2}{a^2q^2+b^2p^2}, \qquad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2},$$

ce qui donnera

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 n^2 + b^2 m^2}, \qquad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2}.$$

Pour s'assurer de la possibilité de cette transformation, il faut voir si la détermination des quantités m, n, p et q, n'est sujette à aucune exception. L'équation

$$a^2 nq + b^2 mp = 0,$$

mise sous la forme

$$a^2 + b^2 \frac{mp}{nq} = 0,$$

fera toujours connoître le rapport de p à q, ou celui de m à n. Si on en tire

$$\frac{p}{q} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{n}{m},$$

et si, pour abréger, on fait

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{n}{m} = -r,$$

il viendra

$$p = qr:$$

substituant dans $p^2 + q^2 = 1$, on en déduira

$$q^2(1 + r^2) = 1,$$

d'où l'on conclura

$$q = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad p = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}},$$

expressions qui demeureront toujours réelles, quelle que soit r. L'équation $m^2 + n^2 = 1$ ne pouvant déterminer qu'une des deux quantités m et n, laisse absolument indéterminé le rapport $\frac{n}{m}$ qui entre dans les expressions de p et de q, lesquelles, par cette raison, deviennent susceptibles d'une infinité de valeurs différentes. Il y a donc en effet une infinité de systèmes de coordonnées dans lesquels l'équation de l'ellipse a la forme

$$a'^2 u^2 + b'^2 t^2 = a'^2 b'^2,$$

absolument semblable à celle de l'équation aux axes

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

136. En opérant sur l'équation de l'hyperbole

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{ou} \quad b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

comme nous venons de faire sur celle de l'ellipse, nous aurons successivement

$$(b^2 m^2 -$$

$$(b^2m^2-a^2n^2)t^2+2(b^2mp-a^2nq)tu+(b^2p^2-a^2q^2)u^2=a^2b^2,$$

$$b^2mp-a^2nq=0,$$

$$t^2+\frac{b^2p^2-a^2q^2}{b^2m^2-a^2n^2}u^2=\frac{a^2b^2}{b^2m^2-a^2n^2};$$

comparant ce dernier résultat à

$$t^2-\frac{a'^2}{b'^2}u^2=a'^2,$$

nous trouverons

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{b^2m^2-a^2n^2},\quad b'^2=\frac{-a^2b^2}{b^2p^2-a^2q^2}.$$

Les expressions de p et de q seront de la même forme dans ce cas-ci que dans le précédent, et pourront donner par conséquent une infinité de valeurs, d'après celles qu'on assignera au rapport $\frac{n}{m}$. Nous serons donc fondés à tirer pour l'hyperbole une conclusion pareille à celle que nous avons énoncée pour l'ellipse.

157. Passons à la parabole; son équation $y^2=4c'x$, ne peut être transformée en une autre qui lui soit semblable, par les formules

$$x=mt+pu,\qquad y=nt+qu.$$

On obtient en effet la résultante

$$n^2t^2+2nqtu+q^2u^2=4c'(mt+pu),$$

de laquelle il faudroit faire disparoître trois termes, savoir, ceux qui sont affectés de t^2, tu et u; or, c'est ce qui ne se peut, puisque parmi les quantités m, n, p et q, on n'en sauroit déterminer que deux. Ayons donc recours au déplacement de l'origine, et substituons à x et à y leurs valeurs plus générales

$$mt+pu+a,\qquad nt+qu+b\ (116);$$

nous aurons ainsi

$$\left.\begin{array}{l} n^2t^2 + 2nqtu + q^2u^2 \\ + 2b(nt + qu) - 4c'(mt + pu) \\ + b^2 - 4ac' \end{array}\right\} = 0.$$

Pouvant disposer maintenant de quatre quantités, à cause des deux nouvelles indéterminées a et b, nous ferons disparoître les termes affectés de tu, de u, et les termes indépendans de t et de u, en posant

$$2nq = 0, \quad 2bq - 4c'p = 0, \quad b^2 - 4ac' = 0.$$

La première de ces équations peut être satisfaite de deux manières : soit par $n = 0$, soit par $q = 0$; mais celle-ci donne $p = 0$, dans la seconde équation, ce qui ne sauroit s'accorder avec l'équation $p^2 + q^2 = 1$. En adoptant la valeur $n = 0$, le terme n^2t^2 s'évanouit, et il ne reste que

$$q^2u^2 = 4c'mt \quad \text{ou} \quad u^2 = \frac{4c'mt}{q^2},$$

équation semblable à celle qui se rapporte à l'axe de la courbe. La supposition de $n = 0$, introduite dans l'équation $m^2 + n^2 = 1$, donne

$$m = \pm 1;$$

de $2bq - 4c'p = 0$, on tire

$$\frac{q}{p} = \frac{2c'}{b},$$

et cette équation, combinée avec $p^2 + q^2 = 1$, détermine p et q. L'équation $b^2 - 4ac' = 0$, détermine aussi a, lorsque b est connu; mais cette dernière quantité reste susceptible de telle valeur qu'on voudra.

138. Les remarques précédentes conduisent à cette question : *un diamètre quelconque étant donné, trouver la position de son conjugué.* On la résoudra en observant que lorsque dans la figure 43 du numéro 116, l'angle CAB, ou celui que font entre eux les axes des coordonnées primitives x, y, est droit, les triangles

$P''A'''R$ et $P''MQ$ deviennent rectangles, l'un en R, l'autre en Q; et qu'il s'ensuit que $m = \frac{A'''R}{A'''P''}$ représente le cosinus de l'angle $P''A'''R$ ou $B''A'''B'$, et que $n = \frac{P''R}{A'''P''}$ en est le sinus; que $p = \frac{P''Q}{P''M}$ représente le cosinus de l'angle $MP''Q$ ou $C''A'''B'$, et que $q = \frac{QM}{P''M}$ en est le sinus. Si l'on rapporte ces mêmes dénominations à l'axe II', sur lequel se prennent les abscisses x dans les figures 50 et 51, et qu'on connoisse l'angle que fait avec cet axe le diamètre quelconque FO, pris pour l'axe des t, les quantités m et n seront données, et suffiront pour déterminer p et q par le moyen de l'équation $p^2 + q^2 = 1$, combinée avec celle qu'on a déduite de la propriété des diamètres conjugués. Ayant q, on aura par conséquent l'angle que fait avec l'axe II', le diamètre OH conjugué avec FO. FIG. 50 et 51.

139. Pour l'ellipse, fig. 50, on a l'équation FIG. 50.

$$a^2 nq + b^2 mp = 0 \ (135),$$

de laquelle on tire

$$\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n},$$

et puisque

$$\frac{m}{n} = \frac{\cos FOI}{\sin FOI} = \frac{1}{\text{tang } FOI}, \quad \frac{q}{p} = \frac{\sin HOI}{\cos HOI} = \text{tang } HOI$$

il vient

$$\text{tang } HOI = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\text{tang } FOI}.$$

Si l'on suppose connues les coordonnées du point F, et qu'on désigne OE par α, EF par β, on aura

$$\text{tang } FOI = \frac{EF}{OE} = \frac{\beta}{\alpha},$$

et par conséquent

$$\text{tang } HOI = -\frac{b^2 \alpha}{a^2 \beta}.$$

En représentant par α' et β' les lignes OG et GH, on aura

$$\text{tang } HOI = \frac{GH}{OG} = \frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{b^2 \alpha}{a^2 \beta},$$

d'où

$$a^2 \beta \beta' + b^2 \alpha \alpha' = 0;$$

cette équation jointe à celle de l'ellipse qui donnera

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2),$$

fera connoître α' et β', ou les coordonnées du point H, par le moyen de celles du point F.

Nous remarquerons en passant que cette manière de trouver la position d'un diamètre conjugué avec un autre, donne en même temps celle de la tangente à un point quelconque de la courbe, puisque le diamètre OH est nécessairement parallèle à la droite FT qui touche l'ellipse au point F (115), et qui peut par conséquent se mener dès que OH est tirée.

On peut aussi, lorsque la tangente est menée, s'en servir pour tirer OH.

Les calculs ci-dessus s'effectuent d'une manière sem-
FIG. 51. blable dans l'hyperbole, fig. 51, pour laquelle on a l'équation

$$b^2 mp - a^2 nq = 0 \quad (136),$$

dont on tire successivement

$$\frac{q}{p} = \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}, \quad \text{tang } HOI = \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\text{tang } FOI}, \quad \text{tang } HOI = \frac{b^2 \alpha}{a^2 \beta}.$$

Dans ce cas-ci, le second diamètre OH ne rencontrant pas la courbe, on pourra prendre OI et IR au lieu de OG et de GH de la *fig.* 50, ou faire $\alpha' = a$; et comme

$$\text{tang } HOI = \frac{IR}{OI} = \frac{\beta'}{a},$$

on aura

$$\frac{\beta'}{a} = \frac{b^2 \alpha}{a^2 \beta},$$

ce qui donnera le point R.

Dans la parabole, on a $n = 0$; il suit de là que l'axe des t, FO, *fig.* 52, est parallèle à celui des x, et que sa position ne dépend que du point O, où il rencontre la courbe. Ce point se trouve déterminé par la quantité a, laquelle représente évidemment l'abscisse IE, qui répond sur l'axe IB, au point de la courbe où l'on a en même temps $t = 0$, $u = 0$. L'équation $\frac{q}{p} = \frac{2c}{b}$ donne la tangente trigonométrique de l'angle compris entre l'axe des t et celui des u; et si l'on mène ce dernier HT, par le point O, il sera en même temps tangent à la parabole, d'après la remarque faite plus haut, relativement à l'ellipse. FIG. 52.

140. Dans les équations

$$a'^2 u^2 + b'^2 t^2 = a'^2 b'^2, \quad b'^2 t^2 - a'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

dont la première appartient à l'ellipse, et la seconde à l'hyperbole, les lettres a' et b' représentent les deux demi-diamètres conjugués; en effet, quand $u = 0$, il vient

$$t = a' \quad \text{ou} \quad FO = a'$$

et lorsque $t = 0$, il vient

$$u^2 = b'^2 \quad \text{ou} \quad u^2 = -b'^2,$$

ce qui donne pour l'hyperbole comme pour l'ellipse,

$$OH = b' \text{ (118)}.$$

Il est facile de voir que les quantités m, n, p, q, peuvent, au moyen des équations $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, et des expressions de a'^2 et de b'^2, être éliminées de l'équation de condition qui détermine les diamètres conjugués, et qu'on doit parvenir à une relation entre ces lignes et les demi-axes.

Lorsqu'il s'agit de l'ellipse, on a (135)

$$a^2 nq + b^2 mp = 0,$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 n^2 + b^2 m^2},$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2};$$

en combinant ces équations avec

$$m^2 + n^2 = 1, \qquad p^2 + q^2 = 1;$$

pour en éliminer les quatre quantités m, n, p, q, l'équation finale ne renfermant plus que les quatre lettres a, b, a' et b', exprimera la relation demandée. De l'équation

$$a^2 nq + b^2 mp = 0,$$

on tire

$$a^2 nq = -b^2 mp;$$

élevant au quarré, et substituant pour n^2 et q^2, leurs valeurs $1 - m^2$, $1 - p^2$, il viendra

$$a^4 (1 - m^2)(1 - p^2) = b^4 m^2 p^2,$$

d'où on tirera

$$m^2 = \frac{a^4 (1 - p^2)}{b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2)}, \qquad 1 - m^2 = \frac{b^4 p^2}{b^4 p^2 + a^4 (1 - p^2)};$$

Mettant aussi pour n^2 et pour q^2, leurs valeurs dans les expressions de a'^2 et de b'^2, on formera ces équations :

$$a'^2\{a^2(1-m^2)+b^2m^2\}=a^2b^2,$$
$$b'^2\{a^2(1-p^2)+b^2p^2\}=a^2b^2;$$

et chassant m^2 et $1-m^2$ de la première, on aura

$$a'^2\left\{\frac{a^2b^4p^2+a^4b^2(1-p^2)}{b^4p^2+a^4(1-p^2)}\right\}=a^2b^2,$$

résultat dont les deux membres se divisent par a^2b^2, et qui donne ensuite

$$a'^2\{b^2p^2+a^2(1-p^2)\}=b^4p^2+a^4(1-p^2).$$

De cette dernière équation, on éliminera p^2, en prenant sa valeur dans

$$b'^2\{a^2(1-p^2)+b^2p^2\}=a^2b^2,$$

on trouvera, après la substitution et les réductions qu'elle entraîne,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \text{ ou } \overline{FO}^2+\overline{OH}^2=\overline{OI}^2+\overline{OL}^2.$$

En traitant de la même manière les équations (136)

$$b^2mp-a^2nq=0,$$
$$a'^2=\frac{a^2b^2}{b^2m^2-a^2n^2},$$
$$b'^2=-\frac{a^2b^2}{b^2p^2-a^2q^2},$$

qui se rapportent à l'hyperbole, on obtiendra

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2, \text{ ou } \overline{FO}^2-\overline{OH}^2=\overline{OI}^2-\overline{OL}^2.$$

Donc *la somme des quarrés des demi-diamètres conjugués dans l'ellipse, ou leur différence dans l'hyperbole, est égale à la somme des quarrés des demi-axes, ou à leur différence.*

141. Si on multiplie entre elles les expressions de a'^2 et de b'^2 dans l'ellipse, on obtiendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 n^2 q^2 + a^2 b^2 n^2 p^2 + a^2 b^2 m^2 q^2 + b^4 m^2 p^2};$$

mais en quarrant l'équation $a^2 n q + b^2 m p = 0$, il vient

$$a^4 n^2 q^2 + 2 a^2 b^2 m n p q + b^4 m^2 p^2 = 0,$$

ou

$$a^4 n^2 q^2 + b^4 m^2 p^2 = -2 a^2 b^2 m n p q;$$

avec cette valeur, on fera disparoître le premier et le dernier terme du dénominateur de l'expression de $a'^2 b'^2$, qui deviendra

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 n^2 p^2 - 2 a^2 b^2 m n p q + a^2 b^2 m^2 q^2}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{(n p - m q)^2};$$

prenant de part et d'autre la racine quarrée, on aura

$$a' b' = \frac{a b}{n p - m q} \text{ ou } a' b' (n p - m q) = a b.$$

Il est important de remarquer que la quantité $n p - q m$ n'est autre chose que le sinus de l'angle que font entre
FIG. 50. eux les deux diamètres conjugués $F O$ et $O H$, car n et m étant le sinus et le cosinus de l'angle $F O I$, q et p le sinus et le cosinus de l'angle $H O I$, la formule

$$\sin F O H = \sin (F O I + H O I)$$
$$= \sin F O I \cos H O I + \cos F O I \sin H O I \text{ (11)},$$

donne

$$\sin F O H = n p - m q,$$

si l'on fait attention que l'angle $H O I$ tombant au-dessous de l'axe $I I'$, a un sinus négatif, $q = -\frac{b^2 m p}{a^2 n}$, qu'il faut rendre positif dans cette formule, et prendre par conséquent $-q$ au lieu de $+q$: on aura donc

$$a' b' \sin F O H = a b.$$

Il est facile de voir que si du point F on abaisse sur OH la perpendiculaire FQ, on aura

$$FQ = FO \sin FOH = a' \sin FOH;$$

et que par conséquent la surface du parallélogramme

$$FH = OH \times FQ = a'b' \sin FOH:$$

on doit donc conclure de ce qui précède que le rectangle formé sur les demi-axes a et b ou OI et OL, est égal au parallélogramme FH, formé sur les deux demi-diamètres conjugués OF et OH.

On reconnoîtra que la même propriété a lieu dans l'hyperbole, en formant de même le produit $a'^2b'^2$; mais il faudra prendre garde que dans la figure 51, l'angle FIG. 51.

$$FOH = HOI - FOI.$$

On déduit de là cette propriété remarquable, que *les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse ou inscrits entre les deux parties opposées de l'hyperbole, sont tous égaux au rectangle des axes*, puisque ces parallélogrammes, ainsi que le montrent les figures, sont composés de quatre autres parallélogrammes égaux chacun au quart du rectangle des axes, exprimé par $4a^2b^2$.

142. Si on désigne par s le sinus de l'angle FOH, on aura l'équation

$$a'b's = ab,$$

que l'on combinera avec

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

dans l'eilipse, et avec

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

dans l'hyperbole, pour trouver les demi-axes a et b, lorsqu'on ne connoîtra que deux demi-diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entre eux. Quand on aura les

axes, on arrivera facilement aux angles qu'ils font avec les diamètres conjugués, en se servant des expressions de a'^2 et b'^2, rapportées dans les n°s 135 et 136. Nous laisserons au lecteur à effectuer les calculs et les constructions qui en dérivent ; ce que nous avons dit remplit le but que nous nous étions proposé, de montrer comment on peut déduire les principales propriétés des courbes du second degré, par une méthode vraiment analytique, et indépendante des constructions géométriques.

143. Les propriétés fondamentales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole que nous avons fait connoître dans le numéro 134, et qui ont lieu, soit par rapport aux axes, soit par rapport aux diamètres, se retrouvent dans les differentes courbes qui résultent de l'intersection de la surface conique par un plan quelconque. En voici les démonstrations synthétiques.

FIG. 53. Soit ASB, *fig.* 53, un cône quelconque à base circulaire, c'est-à-dire le corps terminé par la surface qu'engendre, en glissant sur la circonférence du cercle $ACBD$, une droite assujettie à passer par le point S, dans toutes les positions qu'elle prend. Il est évident, 1°. que si l'on coupe ce corps par un plan quelconque CSD, mené par le *sommet* S du cône, on obtiendra deux lignes droites qui répondent aux deux positions prises par la droite génératrice, lorsqu'elle est parvenue successivement aux points C et D, dans lesquels le plan CSD rencontre la circonférence $ACBD$. 2°. Si le plan coupant est $A'C'B'D'$, parallèle au plan de la base $ACBD$, la section sera un cercle, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre en concevant qu'on ait mené par le point S et le centre de la base l'*axe* SO du cône proposé, et que l'on ait fait passer par cet axe deux plans quelconques ASB et CSD, dont les intersections

respectives avec $ACBD$, $A'C'B'D'$ soient AB et $A'B'$, CD et $C'D'$; car on aura alors les triangles semblables

$$COS,\ C'O'S,$$

qui donneront

$$CO : C'O' :: SO : SO',$$

et les triangles semblables AOS, $A'O'S$, qui donneront

$$AO : A'O' :: SO : SO',$$

d'où on conclura

$$AO : A'O' :: CO : C'O' :$$

et puisque par construction $AO = CO$, on aura

$$A'O' = C'O',$$

ce qui prouve que tous les rayons de la section $A'C'B'D'$ sont égaux, qu'elle est par conséquent un cercle.

Il est à propos d'observer que la surface du cône s'étend indéfiniment, soit au-dessous du plan de la base $ABCD$, soit au-dessus de son sommet S, puisque rien ne limite la longueur de la droite génératrice; il est aisé de sentir que la partie Sb du prolongement de la droite SB, décrit un second cône placé dans une situation inverse du premier.

144. Ces préliminaires étant posés, concevons, 1°. que le cône ASB, *fig.* 54, soit coupé par un plan qui rencontre en même temps les deux côtés AS et SB, et qui, par conséquent, n'entre point dans le cône supérieur aSb; il est évident que dans ce cas la section $IMI'm$ sera une courbe fermée ou rentrante en elle-même. Soit GH la commune section du plan coupant avec le plan de la base $ACBD$; imaginons que la ligne AOB, qui détermine la position du plan triangulaire ASB, soit perpendiculaire sur GH, et supposons menés parallèlement à $ACBD$, deux plans $EMFm$, $E'M'F'm'$, qui rencon- FIG. 54.

treront en même temps le plan coupant $IMI'm$: les communes sections des deux premiers avec le troisième, représentées par Mm, $M'm'$, seront parallèles à GH, et par conséquent perpendiculaires aux lignes EF et $E'F'$, qui sont parallèles entre elles, comme étant les communes sections des plans $EMFm$, $E'M'F'm'$, par le plan ASB. Les courbes $EMFm$, $E'M'F'm'$ étant des circonférences de cercle (n°. précéd.), on aura

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP}, \qquad \overline{P'M'}^2 = \overline{E'P'} \times \overline{F'P'}.$$

Mais la ligne II', commune section des plans ASB et $IMI'm$, forme avec les lignes EF, $E'F'$, et les côtés du cône, les triangles EIP, $E'IP'$, semblables entre eux, et les triangles $FI'P$, $F'I'P'$, aussi semblables entre eux ; les deux premiers donneront,

$$EP : E'P' :: IP : IP' ;$$

et les deux autres,

$$FP : F'P' :: I'P : I'P' ;$$

multipliant ces proportions par ordre, on aura

$$\overline{EP} \times \overline{FP} : \overline{E'P'} \times \overline{F'P'} :: \overline{IP} \times \overline{I'P} : \overline{IP'} \times \overline{I'P'},$$

et substituant à $\overline{EP} \times \overline{FP}$ et $\overline{E'P'} \times \overline{F'P'}$, leurs valeurs $\overline{PM}^2$ et $\overline{P'M'}^2$, on obtiendra

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: \overline{IP} \times \overline{I'P} : \overline{IP'} \times \overline{I'P'}$$

proportion qui exprime la propriété caractéristique de l'ellipse, énoncée dans le n°. 134.

145. Il est à propos de remarquer que si le triangle SII' étoit semblable au triangle SAB, sans que la ligne II' fût parallèle à AB, ce qui auroit lieu si l'angle SII' étoit égal à SAB, et que $SI'I$ le fût à SBA, alors les triangles EPI et $FI'P$ étant semblables entre eux comme les précédens, donneroient

$EP : I'P :: IP : FP$, ou $\overline{EP} \times \overline{FP} = \overline{I'P} \times \overline{IP}$;

et parce que dans le cercle EMF on a

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP},$$

on auroit aussi

$$\overline{PM}^2 = \overline{I'P} \times \overline{IP}.$$

La section $IMI'm$ seroit donc elle-même un cercle dans ce cas, si les ordonnées PM étoient perpendiculaires au diamètre II'; mais pour que cette dernière condition soit remplie, il faut que la commune section GH du plan coupant et de la base du cône soit perpendiculaire à-la-fois sur la droite GA et sur la droite GI, c'est-à-dire, qu'elle soit perpendiculaire au triangle SAB mené par l'axe, et que par conséquent celui-ci soit lui-même perpendiculaire au plan de la base du cône et au plan coupant. Lorsque ces circonstances se rencontrent ensemble, le plan coupant est dit *antiparallèle* à celui de la base, et il en résulte que dans un cône à base circulaire, la section antiparallèle à cette base est un cercle de même que la section parallèle.

146. Si le plan coupant étoit, par rapport aux côtés du cône, dans la situation que représente la figure 55, c'est-à-dire qu'il pût rencontrer en même temps les deux cônes opposés, il formeroit dans chaque cône une courbe indéfinie, puisqu'une fois entré dans le cône, ce plan ne sauroit plus en être dégagé. Les deux cônes opposés ne formant, à proprement parler, qu'une seule surface, les deux courbes KIk et $K'I'k'$ doivent être regardées comme n'en composant qu'une seule. Il est facile de reconnoître déjà une ressemblance marquée entre cette courbe et l'hyperbole; mais pour prouver leur identité, il faut de plus retrouver dans la première une des pro- FIG. 55.

priétés caractéristiques de la seconde. En supposant que le plan $A\,S\,B$ soit déterminé comme dans le numéro 144, qu'on ait mené le plan $E\,M\,F\,m$ parallèle à $A\,C\,B\,D$, et tiré les droites $I'\,I$, $M\,m$, $M'\,m'$, qui sont les communes sections du plan coupant avec les trois plans ASB, $EMFm$, $ACBD$, on comparera entre eux les triangles semblables $F\,P\,I$, $A\,I\,P'$, qui donneront

$$E\,P : A\,P' :: I\,P : I\,P',$$

et les triangles semblables $F\,I'\,P$, $B\,I'\,P'$, qui donneront

$$F\,P : B\,P' :: I'\,P : I'\,P';$$

multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra

$$\overline{E\,P} \times \overline{F\,P} : \overline{A\,P'} \times \overline{B\,P'} :: \overline{I\,P} \times \overline{I'\,P} : \overline{I\,P'} \times \overline{I'\,P'}.$$

Mais à cause que les sections $E\,M\,F\,m$ et $A\,C\,B\,D$ sont des cercles dont les diamètres $E\,F$ et $A\,B$ sont perpendiculaires aux lignes $M\,m$ et $M'\,m'$, par construction, on aura

$$\overline{E\,P} \times \overline{F\,P} = \overline{P\,M}^2, \quad \overline{A\,P'} \times \overline{B\,P'} = \overline{P'\,M'}^2,$$

et par conséquent

$$\overline{P\,M}^2 : \overline{P'\,M'}^2 :: \overline{I\,P} \times \overline{I'\,P} : \overline{I\,P'} \times \overline{I'\,P'},$$

proportion dans laquelle se trouve exprimée la propriété caractéristique de l'hyperbole, énoncée dans le n°. 134.

147. Il nous reste encore à examiner le cas où le plan coupant seroit parallèle à l'un des côtés du cône, ainsi
FIG. 56. que le montre la figure 56. Il ne pourroit alors rencontrer qu'un seul des deux cônes opposés; mais il ne s'en dégageroit jamais, en sorte que la section $M\,I\,m$ seroit une courbe ouverte et indéfinie, comme la parabole, avec laquelle nous allons prouver qu'elle est identique. Les plans $A\,S\,B$, $E\,M\,F\,m$, $A\,C\,B\,D$, étant menés dans les mêmes conditions que ci-dessus, le parallélisme des lignes $I\,P'$ et $S\,B$, donne

$$FP = BP';$$

d'un autre côté, les triangles EIP, AIP', étant semblables, conduisent à

$$EP : AP' :: IP : IP';$$

multipliant l'un des termes du second rapport par FP, et l'autre par BP', il viendra

$$\overline{EP} \times \overline{FP} : \overline{AP'} \times \overline{BP'} :: IP : IP'.$$

Mais dans les cercles $EMFm$ et $ACBD$, on a toujours

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP}, \quad \overline{P'M'}^2 = \overline{AP'} \times \overline{BP'};$$

on aura donc

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP : IP',$$

proportion qui n'est que l'expression de la propriété caractéristique de la parabole, énoncée dans le n°. 134.

148. Examinons à présent les propriétés des lignes droites qui coupent ou qui touchent les courbes du second degré. Pour suivre la méthode que nous avons employée à l'égard du cercle en particulier (101), nous prendrons l'équation

$$y - \beta = A(x - \alpha),$$

qui appartient à la droite passant par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est A; nous la combinerons avec l'équation $y^2 = mx + nx^2$, semblable à celle du numéro 121, et comprenant par conséquent les trois courbes du second degré. En faisant comme dans le numéro 101,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = z,$$

nous aurons

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+A^2}}, \quad y = \beta + \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}};$$

et posant pour abréger $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} = A'$, il viendra

$$x = \alpha + A'z, \quad y = \beta + A'Az:$$

substituant ces valeurs dans l'équation $y^2 = mx + nx^2$ nous obtiendrons cette transformée

$$\beta^2 + 2\beta A A'z + A^2 A'^2 z^2 = \begin{cases} m\alpha + mA'z \\ +n\alpha^2 + 2nA'\alpha z + nA'^2 z^2. \end{cases}$$

Passant tous les termes dans un seul membre, et ordonnant par rapport à z, nous trouverons

$(A^2 - n)A'^2 z^2 + (\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha)2A'z + \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0$,

ce qui revient à

$$z^2 + \frac{2(\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha)}{(A^2 - n)A'} z + \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2} = 0.$$

Dans cette équation, l'inconnue z représente la distance
FIG. 58. EM, *fig.* 58, entre le point donné E, et l'un des points d'intersection M et M' de la droite proposée EM, avec la courbe AC; par le moyen de sa valeur, on parviendra facilement à celles des coordonnées de cette intersection.

149. En raisonnant ici comme pour le cas du cercle (103), on verra que les deux valeurs de z doivent devenir égales lorsque la ligne proposée ne fait plus que toucher la courbe, comme en N, parce que les points M et M' se rapprochent de plus en plus, à mesure que la ligne EM s'approche de EN. La différence des deux valeurs de z comprises dans la formule

$$z =$$

$$x=-\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}}$$

étant exprimée par

$$2\sqrt{\left(\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}},$$

et donnant toujours la longueur de la corde MM', devient nulle lorsque les points M et M' coïncident, et fournit par conséquent pour le point de contact N, l'équation

$$\left(\frac{\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha}{(A^2-n)A'}\right)^2-\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}=0\,(1).$$

En la développant, A'^2 disparoîtra comme diviseur commun à tous les termes, et la résultante sera l'équation qui doit donner A, et faire connoître par conséquent la position de la droite EN, menée par le point E, tangentiellement à la courbe AC.

Ne voulant considérer que les cas les plus simples, nous supposerons que le point E soit pris sur l'axe des abscisses AP, fig. 59, il résultera de là $\beta=0$, et FIG. 59.

$$\frac{(\frac{1}{2}m+n\alpha)^2}{(A^2-n)^2}+\frac{m\alpha+n\alpha^2}{A^2-n}=0:$$

cette dernière se réduit, après le développement, à

$$\tfrac{1}{4}m^2+m\alpha A^2+n\alpha^2A^2=0,$$

on donne

$$A=\frac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{-m\alpha-n\alpha^2}}.$$

Cette expression se présente sous une forme imaginaire, mais elle peut devenir réelle par les valeurs particulières que recevront les quantités m, n et α, et cela arrive pour tous les cas où la position du point E et la nature de la courbe permettent de lui mener une tangente par ce point.

150. Il y a encore un cas dans lequel la condition de contingence se simplifie beaucoup, c'est celui où le point donné étant sur la courbe même, se confond avec le point de contact. Concevons en effet que le point E passe en M, fig. 58; il y aura alors entre α et β la même relation qu'entre x et y, sur la courbe AC, c'est-à-dire qu'on aura

FIG. 58.

$$\beta^2 = m\alpha + n\alpha^2 \quad \text{ou} \quad \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

ce qui réduira l'équation (1) à la suivante

$$\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha = 0,$$

d'où on tirera

$$A = \frac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\beta}.$$

Telle est l'expression de la tangente de l'angle que doit faire avec l'axe des abscisses la droite TM pour toucher la courbe AC.

La position de cette droite seroit donnée d'une manière plus commode si l'on en connoissoit un second point; et celui qui s'offre le plus naturellement, est le point T, où elle rencontre l'axe des abscisses, et pour lequel on a $y = 0$ dans l'équation $y - \beta = A(x - \alpha)$ (81). Il résulte de là

$$-\beta = A(x - \alpha) \quad \text{et} \quad x - \alpha = -\frac{\beta}{A};$$

la quantité $x - \alpha$ étant la différence des abscisses des points M et T, désigne la portion PT de l'axe AB: mettant donc pour A sa valeur, on aura

$$PT = -\frac{\beta}{\frac{1}{2}m + n\alpha} \text{ (*)}.$$

La ligne PT est nommée la *soutangente*, et lors-

(*) Dans la figure, PT est la somme des lignes AT et AP, parce que l'abscisse AT du point T est négative par rapport à l'abscisse AP du point P (72).

qu'elle est construite, on obtient la tangente en joignant le point M et le point T par une droite.

151. Pour connoître l'expression de la soutangente dans chacune des courbes du second degré en particulier, il suffit de comparer successivement les équations

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2),\ y^2=\frac{p}{2a}(x^2-2ax),\ y^2=px,$$

avec l'équation $y^2=mx+nx^2$. En observant comme ci-dessus que α et β désignant les coordonnées du point de contact situé sur la courbe, ont entre eux les mêmes relations que x et y, et substituant en conséquence pour β^2 sa valeur, on trouvera, par la première équation appartenante à l'ellipse,

$$m=p, n=-\frac{p}{2a},\ \text{d'où}\ PT=-\frac{2a\beta^2}{p(a-\alpha)}=-\frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha},$$

par la seconde, appartenante à l'hyperbole,

$$m=-p, n=\frac{p}{2a},\ \text{d'où}\ PT=-\frac{2a\beta^2}{p(a-a)}=-\frac{\alpha^2-2a\alpha}{\alpha-a},$$

par la troisième enfin, appartenante à la parabole,

$$m=p, n=0,\ \text{d'où}\ PT'=-\frac{2\beta^2}{p}=-2\alpha.$$

Cette dernière expression, la plus simple des trois, nous apprend que *dans la parabole la soutangente est double de l'abscisse*. Le signe — qui l'affecte, ainsi que les autres, montre qu'elle doit être prise sur l'axe AB, à partir du point P, vers le côté où se portent les x négatifs; mais comme la forme des courbes indique suffisamment de quel côté doit tomber la soutangente, on fera désormais abstraction du signe de son expression.

La construction des premieres expressions n'offre pas beaucoup plus de difficulté : on a pour l'ellipse

$$a-\alpha : 2a-\alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha-\alpha^2}{a-\alpha}=PT,$$

pour l'hyperbole

$$a - \alpha : a - 2a :: a : \frac{a^2 - 2a\alpha}{a - \alpha} = PT;$$

ainsi, tout se réduit à trouver des quatrièmes proportionnelles.

Il est bien remarquable que le second axe b n'entre point dans ces expressions ; il en résulte que pour la même abscisse, la soutangente est la même dans toutes les ellipses qui ont le même grand axe, et qu'il en arrive autant aux hyperboles. L'ellipse se changeant en cercle lorsque $b = a$, on peut mener la tangente à la première de ces courbes par le moyen de celle de la seconde; car si l'on prolonge l'ordonnée pm, fig 46, jusqu'à la rencontre du cercle décrit sur le grand axe, et qu'on tire la droite nT tangente à ce dernier, au point n, la soutangente pT conviendra aussi, d'après ce qui précède, au point m de l'ellipse, dont la tangente s'obtiendra par conséquent en joignant le point T et le point m. On auroit une construction semblable pour les hyperboles quelconques, en partant des soutangentes de l'hyperbole équilatère (125).

FIG. 46.

152. Quand on a la soutangente, il est facile d'en déduire les expressions de la *tangente*, de la *sous-normale* et de la *normale* : ce sont les noms qu'on donne aux lignes TM, PR et MR, fig 58. La première est la portion de la tangente comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses ; la seconde est la partie de l'axe des abscisses comprise entre le pied de l'ordonnée PM et le point R, où une droite, menée perpendiculairement à la tangente par le point M, rencontre l'axe des abscisses ; enfin la troisième est la longueur même de cette perpendiculaire, mesurée depuis le point M jusqu'à l'axe des abscisses.

FIG. 58.

1°. Par le triangle TMP, rectangle en P, on a

$$MT = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PT}^2}.$$

2°. Les triangles PMT, PMR, semblables entre eux comme étant formés par la perpendiculaire PM, abaissée de l'angle droit du triangle TMR, rectangle en M, donneront.

$$PT : PM :: PM : PR, \quad \text{d'où} \quad PR = \frac{\overline{PM}^2}{PT}.$$

3°. Il résulte du triangle MPR, rectangle en P,

$$MR = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2}.$$

Il est visible que ces formules conviennent à toutes les courbes, et que pour les appliquer à l'ellipse, par exemple, il faut mettre dans la première et dans la seconde, au lieu de PM et de PT, les valeurs relatives à cette courbe, puis avec la valeur qu'on obtiendra pour PR et celle de PM, on formera celle de MR; il faudra opérer de même par rapport à l'hyperbole et à la parabole. Nous nous bornerons à rapporter ici les résultats de ces substitutions, qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Pour l'ellipse

$$PT = \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2}$$

pour l'hyperbole

$$PT = \frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \left(\frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(\alpha - a), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \frac{b^4}{a^4}(\alpha - a)^2},$$

pour la parabole

$$PT = 2\alpha \qquad MT = \sqrt{p\alpha + 4\alpha^2},$$

$$PR = \tfrac{1}{2}p \qquad MR = \sqrt{p\alpha + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

On obtient des résultats un peu plus simples, à l'égard des deux premières courbes, lorsqu'on compte les abscisses à partir du centre, ce qu'on ne peut faire pour la troisième, qui en est dépourvue (121). Pour parvenir à ces résultats, il suffit de faire $x = a - x'$ dans l'ellipse, et $x = x' + a$ dans l'hyperbole (132); x' sera la nouvelle abscisse prise à partir du centre : ces substitutions et les réductions qui s'ensuivent étant effectuées, il viendra pour l'ellipse,

$$PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + \left(\frac{a^2 - x'^2}{x'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}x', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + \frac{b^4}{a^4}x'^2},$$

pour l'hyperbole.

$$PT = \frac{x'^2 - a^2}{x'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2) + \left(\frac{x'^2 - a^2}{x'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{a^2}{b^2}x', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}x'^2}.$$

153. Quelqu'élégante que doive paroître la méthode que nous avons employée ci-dessus pour mener les tangentes aux courbes du second degré, nous croyons ne pas devoir passer sous silence les solutions synthétiques que les Anciens ont données de ce problème, et nous allons les exposer succinctement.

FIG. 45. 1°. Par le point M, pris sur l'ellipse, fig. 45, on mènera les deux rayons vecteurs FM et $F'M$; on prolongera l'un d'eux, $F'M$ par exemple, d'une quantité MG égale à FM; on tirera ensuite FG, et la droite MH perpendiculaire sur le milieu de FG, sera tangente au point M, car elle n'aura que ce point de commun avec la courbe. En effet, si l'on prend un autre point quel-

conque N sur cette droite, et qu'on tire les droites FN, $F'N$, on aura

$$F'N + NG > F'G,$$

ce qui revient à

$$F'N + FN > F'M + FM > II';$$

car par la construction $MG = FM$, $NG = FN$; et comme il est aisé de voir que pour les points placés au-dedans de l'ellipse, la somme des distances à chacun des foyers est moindre que le grand axe, il suit de ce qui précède que le point N est hors de l'ellipse, puisque la somme de ses rayons vecteurs est plus grande que l'axe II'.

2°. Lorsque le point proposé M est sur l'hyperbole, fig. 47, il faut porter le plus petit rayon vecteur FM, sur le plus grand $F'M$, et non pas sur son prolongement; achevant la construction comme ci-dessus, on aura pour ce cas FIG. 47.

$$F'N < F'G + NG < F'G + FN,$$

d'où il suit

$$F'N - FN < F'G < F'M - FM,$$

ce qui prouve que le point N n'est pas sur l'hyperbole. Il n'est pas placé dans l'intérieur de cette courbe, car il faudroit, pour que cela fût, que la différence des distances à chacun des foyers surpassât le grand axe. En effet, si on tire $F'm$, on a

$$F'm - Fm = F'm + Mm - FM,$$

et comme $F'm + Mm$ surpasse $F'M$, il s'ensuit

$$F'm - Fm > F'M - FM.$$

3°. Lorsque le point M est sur une parabole, fig. 48, il n'y a plus qu'un rayon vecteur; mais l'autre est remplacé par la droite QM parallèle à l'axe IP : le point Q tient lieu du point G, puisqu'on a $QM = FM$. Considérant ensuite un point N placé avant ou après le contact, FIG. 48.

on a en même-temps QN et $FN > ON$; le point N est donc hors de la courbe.

Si on appliquoit le calcul à ces constructions, on trouveroit les résultats obtenus dans le numéro précédent.

154. La considération des tangentes de l'hyperbole, conduit à une particularité très-remarquable, de laquelle il résulte que quoique son cours s'étende à l'infini, chacune de ses branches demeure néanmoins toujours renfermée entre les côtés d'un certain angle, sans pouvoir jamais les atteindre, ainsi qu'on le voit dans la fig. 57, et ramène ainsi à la circonstance qu'on a fait observer dans le n°. 112. Cette circonstance se reconnoît en observant la marche de la soutangente PT, à mesure que le point de contact M s'avance sur la courbe et s'éloigne du point I, ou, ce qui est la même chose, à mesure que l'abscisse OP augmente. En désignant OP par x, on a (152) $PT = \frac{x^2 - a^2}{x}$, et comme $OT = OP - PT$, il vient

FIG. 57.

$$OT = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}.$$

On voit évidemment par ce résultat que plus x croît, plus OT diminue, et plus le point T s'approche du point O, qu'il ne peut cependant jamais atteindre, puisqu'une fraction ne peut jamais devenir absolument nulle tant que son numérateur ne s'anéantit pas; le point O doit donc être regardé comme la limite vers laquelle le point T tend sans cesse par le progrès de l'abscisse. Examinons maintenant les changemens qu'éprouve, dans les mêmes circonstances, l'angle MTP qui détermine la situation de la tangente par rapport à la ligne des abscisses. La tangente trigonométrique de cet angle a pour expression

$$\frac{MP}{PT} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (29),$$

et prenant la forme $\frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$, lorsqu'on divise ses deux termes par x, elle tend nécessairement vers la quantité $\frac{b}{a}$ à mesure que la fraction $\frac{a^2}{x^2}$ diminue, ou à mesure que x augmente. L'angle MTP ne peut donc augmenter indéfiniment, et la limite qu'il ne peut atteindre, mais dont il s'approche sans cesse, est l'angle EOI, dont la tangente trigonométrique est $\frac{b}{a}$; jamais l'hyperbole ne peut donc parvenir à toucher la ligne EO, quelque prolongées qu'on les suppose l'une et l'autre.

Pour construire l'angle EOI, il faut prendre sur l'axe II' une abscisse à volonté, le demi-axe OI, par exemple, et le triangle rectangle EOI donnant $EI = OI$ tang EOI, on aura

$$EI = OI \times \frac{b}{a} = b,$$

puisque $OI = a$. Élevant donc au point I la perpendiculaire $EI = b$, la droite OE, qui joindra les points O et E, sera la limite de toutes les tangentes de la branche IK de l'hyberbole : cette limite se nomme *asymptote*. Il est évident qu'il en existe une seconde Oe placée au-dessous de l'axe II', faisant avec cet axe le même angle que la première, et servant de limite aux tangentes de la branche Ik.

155. L'équation de l'hyperbole se simplifie beaucoup, lorsqu'on prend les asymptotes pour axes des coordonnées. En effet, menons par le point M, parallèlement

à l'asymptote Oe, une nouvelle ordonnée QM, et faisons $QO=t$, $QM=u$; l'angle EOI compris entre l'axe des t, QO, et celui des x, II', aura évidemment pour cosinus $\frac{OI}{OE}$, pour sinus $\frac{IE}{OE}$; et comme on a

$$OI=a,\ IE=b,\ OE=\sqrt{\overline{OI}^2+\overline{IE}^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

il en résultera (116),

$$m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Considérant ensuite l'axe des u, Oe, nous trouverons

$$\cos eOI=\frac{OI}{Oe},\qquad \sin eOI=\frac{Ie}{Oe};$$

et comme $Oe=OE$, $Ie=-IE$, il viendra

$$p=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad q=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et par les formules générales

$$x=mt+pu,\qquad y=nt+qu,$$

nous aurons

$$x=\frac{a(t+u)}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y=\frac{b(t-u)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, elle se changera, après les réductions, en

$$\frac{4tu}{a^2+b^2}=1,\quad \text{ou}\quad tu=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2).\ (*)$$

(*) On déduiroit immédiatement de l'équation générale des lignes du second ordre, l'équation de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes, en observant que lorsqu'on transforme les coordonnées, en laissant indéterminé l'angle des nouvelles coordonnées, on a, par le N°. 117, quatre quantités arbitraires dont on peut disposer pour faire disparoître les termes affectés de t^2, u^2, t et u; ce qui réduit l'équation à la forme $\alpha ut=\gamma$, mais on ne trouve pour m et n des valeurs réelles que quand $4AC<B^2$, c'est-à-dire pour l'hyperbole seulement.

Cette dernière équation met bien en évidence la propriété dont jouissent les asymptotes, car on en tire

$$u=\frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{t}, \quad \text{ou} \quad QM=\frac{\frac{1}{4}\overline{OE}^2}{QO},$$

ce qui montre que l'ordonnée QM va toujours en diminuant à mesure que le point Q s'éloigne du point O, mais qu'elle ne peut jamais devenir nulle.

Lorsque l'hyperbole proposée est équilatère, $b=a$; la tangente de l'angle EOI, exprimée par $\frac{b}{a}$, se réduit alors à 1; chaque asymptote fait par conséquent avec l'axe II' un angle égal à $0^q,5$, et les deux comprennent entre elles un angle droit. L'équation $tu=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ devenant $tu=\frac{1}{2}a^2$, nous apprend que le produit des coordonnées t et u est égal à la moitié du quarré du demi-grand axe OI.

Il est à propos de remarquer que si l'on mène par le point I les droites ID et Id, respectivement parallèles à Oe et à OE, on formera un losange dont les côtés ID et Id seront, par rapport aux asymptotes, les coordonnées du point I situé sur l'axe; on aura par conséquent

$$\overline{ID}\times\overline{Id}=\overline{ID}^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2),$$

d'où on tirera

$$ID=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

et en général

$$QO\times QM=\overline{ID}^2.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le losange Dd devient un quarré, puisque l'angle DOd est droit.

Le quarré $\overline{ID}^2$, équivalent au quart de la somme des quarrés des demi-axes de l'hyperbole, est ce que les anciens géomètres désignoient sous le nom de *puissance* de l'hyperbole.

156. Il est visible que si l'on prolonge les lignes PM et PM', ordonnées relatives à l'axe II', jusqu'à la rencontre des asymptotes OE et Oe, les parties MR et $M'R'$ de ces ordonnées, interceptées entre chaque branche de courbe et son asymptote, sont égales entre-elles. La même propriété a lieu par rapport à une droite quelconque menée par un point quelconque de l'hyperbole. Si l'on tire, par exemple, MN', on aura $GM = G'N'$, quelque position qu'ait MN'. Pour le prouver, nous commencerons par observer que puisque

$$PR = \frac{bx}{a},$$

$$MR = PR - PM = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR' = PR + PM' = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR \times MR' = b^2.$$

Menons ensuite par le point N' la droite SS' parallèle à MM'; les triangles semblables RMG, $SN'G$, donneront

$$GM : GN' :: MR : N'S;$$

les triangles semblables $G'N'S'$ et $R'MG'$, donneront

$$G'M : G'N' :: MR' : N'S';$$

multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra

$$GM \times G'M : GN' \times G'N' :: MR \times MR' : N'S \times N'S';$$

et comme en vertu de ce qui précède on a

$$MR \times MR' = b^2, \qquad N'S \times N'S' = b^2,$$

on en conclura

$$GM \times G'M = GN' \times G'N'.$$

Mettant à la place de $G'M$ et de $G'N'$, leurs valeurs $G'N' + MN'$, $GM + MN'$, faisant les réductions qui se présentent après les multiplications indiquées, on aura enfin

$$GM \times MN' = G'N' \times MN', \quad \text{ou} \quad GM = G'N'.$$

157. Avec le secours de la propriété que nous venons de démontrer, on décrit bien simplement l'hyperbole par points, lorsqu'on a les asymptotes et un seul point M. On tire par ce point un très-grand nombre de droites comme MN', on prend la partie GM comprise entre le point M et l'asymptote qui en est la plus voisine, pour la porter de G' en N', ce qui donne un nouveau point N' de la courbe cherchée.

Quand on a les asymptotes, on trouve la direction de l'axe II' en divisant en deux parties égales l'angle qu'elles forment; et comme la tangente de l'angle EOI donne le rapport des demi-axes a et b (154), il est aisé de déterminer ces quantités dès qu'on connoît un point de l'hyperbole. L'équation $\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{OP}^2 - a^2)$ donne sur-le-champ $a^2 = \frac{A^2 \times \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2}{A^2}$, en représentant par A la quantité $\frac{b}{a}$

158. Outre l'hyperbole dont les branches sont KIk et $K'I'k'$, les lignes OS et OS' comprennent encore une autre hyperbole HLh, $H'L'h'$, décrite dans les deux autres angles qui forment ces droites, de manière que l'axe transverse II' de la première est le second axe de la deuxième, qui a pour axe transverse LL', second axe de la première. La relation qu'ont entre elles ces deux courbes, les a fait nommer *hyperboles conjuguées;* elles ont même *puissance*, et par conséquent, leur *équation* est la même à l'égard des *asymptotes* : l'angle de ces lignes ou des coordonnées seulement diffère de l'une à l'autre.

159. On a vu (190) comment on reconnoissoit par la forme de l'équation du cercle, combien il falloit de points pour le déterminer : la même considération s'ap-

plique à une courbe quelconque ; et il est visible qu'il faut en général autant de points que l'équation de la courbe demandée renferme de coefficiens à déterminer. L'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F,$$

appartenant aux courbes du second degré en général, étant mise sous la forme

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

ne contient plus que cinq coefficiens, a, b, c, d et e ; il suffira donc de cinq points pour particulariser la courbe du second degré qu'elle représente. En effet, si les coordonnées de ces points sont respectivement

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''''\\ \beta''''\end{matrix}\right\},$$

on formera les cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\beta^2 + a\alpha\beta + b\alpha^2 + c\beta + d\alpha = e\\
&\beta'^2 + a\alpha'\beta' + b\alpha'^2 + c\beta' + d\alpha' = e\\
&\beta''^2 + a\alpha''\beta'' + b\alpha''^2 + c\beta'' + d\alpha'' = e\\
&\beta'''^2 + a\alpha'''\beta''' + b\alpha'''^2 + c\beta''' + d\alpha''' = e\\
&\beta''''^2 + a\alpha''''\beta'''' + b\alpha''''^2 + c\beta'''' + d\alpha'''' = e.
\end{aligned}$$

N'ayant pour but que de démontrer la possibilité de la détermination des lettres a, b, c, d, e, et le nombre de conditions qu'elle exige, nous ne nous arrêterons pas effectuer les calculs qu'entraîneroit cette opération, pour lesquels on peut consulter l'ouvrage de Puissant, cité à la page 144, et où on trouvera sur ce sujet et sur ses applications, les détails les plus importans ; nous nous bornerons à observer que ces équations peuvent devenir contradictoires entre elles dans certains cas particuliers. S'il arrivoit, par exemple, que trois des points donnés fussent en ligne droite, il ne seroit pas possible de faire passer une courbe du second degré par ces

points, puisqu'aucune courbe de ce degré ne peut avoir plus de deux points communs avec une même droite.

On conçoit que quand la courbe est donnée d'espèce et de position, il faut moins de conditions pour la déterminer. Si l'on vouloit déterminer une ellipse dont le centre et le grand axe fussent donnés de position, on n'auroit besoin que de deux points, puisque l'équation $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, relative à ce cas, ne renferme que deux coefficiens, a, b, qui dépendroient alors des équations

$$a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 = a^2 b^2,$$
$$a^2 \beta'^2 + b^2 \alpha'^2 = a^2 b^2,$$

160. Nous avons montré dans le numéro 69 comment l'équation du second degré se construisoit par le moyen d'une circonférence de cercle et d'une droite; nous avons fait voir, n°. 101, que les deux racines étoient données par les deux intersections que peuvent avoir entre elles ces lignes, et que de cette manière on regardoit l'équation proposée comme le résultat de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux indéterminées, l'une appartenant à la droite, et l'autre au cercle; si l'on généralise ce point de vue, on aura le moyen de construire des équations d'un degré quelconque. En effet, si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^4 - b^2 x^2 + c^3 x - d^4 = 0,$$

on pourra la regarder comme le résultat de l'élimination d'une inconnue y, entre deux équations du second degré, renfermant en même temps x et y, et appartenant par conséquent à deux courbes. Trouver ces équations est un problême indéterminé, car il y a une infinité de systêmes d'équations qui peuvent produire la proposée; prenons-en donc une arbitrairement. Soit $x^2 = py$, on aura

$$x^4 = p^2 y^2,$$

et substituant dans l'équation proposée, il viendra

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

ou
$$y^2 - \frac{b^2}{p}y + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Il est aisé de reconnoître que cette équation appartient à une parabole (120); et pour la mettre sous la forme la plus simple, il suffit de faire disparoître le terme multiplié par y, ce qui s'effectuera en prenant $y = y' + \frac{b^2}{2p}$. On aura, après la substitution,

$$y'^2 + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{4d^4 + b^4}{4p^2} = 0,$$

résultat qui peut s'écrire ainsi :

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left\{\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right\},$$

et qui montre que la parabole à laquelle il appartient a pour paramètre la quantité $\frac{c^3}{p^2}$, et que les abscisses comptées à partir de son sommet, sont égales à la différence entre la quantité $\frac{b^4+4d^4}{c^3}$ et les ordonnées de la première parabole $x^2 = py$. En effet, si l'on porte perpendiculairement à l'axe AB des abscisses, fig. 60, et du côté des ordonnées positives, une distance $A\alpha = \frac{b^2}{2p}$, la droite $\alpha\beta$, menée parallèlement à AB, sera l'axe à partir duquel on doit prendre les y'. Le sommet de la parabole dont y' désigne l'ordonnée, correspondant au point où l'on a $y' = 0$, ce qui arrive quand $x = \frac{b^4+4d^4}{c^3}$, il

FIG. 60.

faudra

faudra faire $AD = \frac{b^4 + 4d^4}{c^3}$, et ayant élevé D$\delta$ à angle droit sur AB, le point δ sera le sommet de la seconde parabole $G\delta H$, , $\delta\alpha$ en sera l'axe ; et connoissant son paramètre, rien ne sera plus facile que de la construire par points, suivant le procédé du numéro 129. Quant à la première parabole EAF, donnée par l'équation $x^2 = py$, il est visible qu'elle a son sommet à l'origine A des coordonnées, et pour axe celui des y, AC. Lorsqu'elle sera construite, les points M, M', M'', M''', où elle rencontrera la parabole $G\delta H$, auront des abscisses égales aux racines de l'équation proposée, puisqu'à ces points les valeurs de x satisfont en même-temps aux deux équations

$$x^2 = py,$$

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

desquelles résulte la proposée.

Pour représenter le cas le plus général, nous avons disposé l'équation proposée et la figure de manière que les deux courbes se rencontrassent en quatre points ; mais cette circonstance n'aura lieu qu'autant que l'équation proposée aura ses quatre racines réelles. Si, par exemple, l'axe $\alpha\beta$ de la parabole $G\delta H$ tomboit au-dessous de AB, ce qui arriveroit si le terme b^2py avoit le signe $+$, puisqu'il faudroit faire alors $y = y' - \frac{b^2}{2p}$, il n'y auroit que deux intersections au plus, car il est bien clair que la branche δH ne pourroit plus rencontrer la parabole EAF ; dans certains cas même, la courbe $G\delta H$ se trouvera toute entière au-dessous de EAF, et alors les racines de la proposée seront imaginaires.

On voit au reste par cette construction, comme par la théorie des équations, que l'équation du quatrième degré ne peut avoir qu'un nombre pair de racines

réelles, puisque les deux paraboles EAF et GSH ne peuvent se couper qu'en deux ou en quatre points.

161. Il suit aussi de là que le cercle et la ligne droite ne pouvant se rencontrer en plus de deux points, ne peuvent résoudre que des problemes susceptibles d'être ramenés à des équations du second degré, et ne sauroient par conséquent suffire pour résoudre ceux qui passent ce degré, tels que les problemes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle, si fameux dans l'antiquité.

Par le premier, il s'agit de trouver le côté d'un cube dont le volume soit double de celui d'un autre cube donné. Si a est le côté de celui-ci, et x le côté de l'autre, on aura cette équation :

$$x^3 = 2a^3, \quad \text{ou} \quad x^3 - 2a^3 = 0.$$

Pour la comparer à la proposée, il faut l'amener au quatrième degré, ce qui se fera en la multipliant par x, et on aura

$$x^4 - 2a^3x = 0;$$

comparant avec $x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$, il viendra

$$b = 0, \quad c^3 = -2a^3, \quad d = 0.$$

Les équations des paraboles EAF, GSH, seront par conséquent $x^2 = py$, $y'^2 = \frac{2a^3}{p^2}x$. Ces courbes passeront toutes deux par l'origine A, puisqu'on aura $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, dans l'une et dans l'autre en même temps; elles s'y couperont, et cette intersection donnera $x = 0$, racine qui vient du facteur introduit pour élever au quatrième degré l'équation à construire. La figure 61, qui répond à ce cas, montre que l'on ne peut avoir en outre qu'une seule racine réelle AP; en effet, on a vu dans les *Élemens d'Algèbre* que l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ n'en a pas davantage.

FIG. 61.

162. Le problème de la trisection de l'angle a pour objet de partager un angle ou un arc en trois parties égales, ce qui s'effectueroit sans peine, si, connoissant la corde ou le sinus d'un arc, on obtenoit la corde ou le sinus de son tiers. Cette question n'est qu'un cas particulier de la théorie de la multisection des angles, que nous ne saurions exposer ici, mais dont on trouvera les bases dans l'Introduction au *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*; elle se met en équation par le moyen des formules du numéro 11, qui donnent

$$\cos 3A = \frac{4\cos A^3 - 3R^2\cos A}{R^3}.$$

Si l'on regarde $\cos 3A$ comme donné, et que l'on prenne $\cos A$ pour l'inconnue, on aura, en faisant $\cos 3A = a$ et $\cos A = x$, cette équation :

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2 x - \tfrac{1}{4}R^2 a = 0,$$

qui, étant multipliée par x et comparée à l'équation

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0,$$

donnera

$$b^2 = \tfrac{3}{4}R^2, \quad c^3 = -\tfrac{1}{4}R^2 a, \quad d^4 = 0.$$

On aura encore ici une intersection au point A correspondant à la racine $x = 0$, et les trois autres points d'intersection donneront les trois racines de l'équation

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2 x - \tfrac{1}{4}R^2 a = 0.$$

Il semble au premier coup-d'œil qu'on ne devroit avoir qu'une racine réelle, et qu'il n'y a qu'une seule manière de partager un arc en trois parties egales, mais on voit d'abord que l'équation ci-dessus tombe dans le *cas irréductible*, et qu'elle a par conséquent ses trois racines réelles; en y refléchissant ensuite avec un peu d'attention, on reconnoit qu'il y a trois arcs qui doivent satisfaire à la question proposée, car les arcs $3A$, $\pi + 3A$,

$2\pi + 3A$, qui ont le même cosinus (23), étant divisés par 3, donnent les valeurs

$$x = \cos A, \quad x = \cos(\tfrac{1}{3}\pi + A), \quad x = \cos(\tfrac{2}{3}\pi + A),$$

essentiellement différentes. On ne peut en avoir d'autres, parce que les arcs $3\pi + 3A$, $4\pi + 3A$, etc. qui ont encore le même cosinus que A, étant divisés par 3, conduisent aux arcs $\pi + A$, $\pi + \frac{1}{3}\pi + A$, etc. et que

$$\cos(\pi + A) = \cos A, \cos(\pi + \tfrac{1}{3}\pi + A) = \cos(\tfrac{1}{3}\pi + A), \text{etc.}$$

163. Avant que les méthodes d'approximation eussent atteint le degré de perfection où elles sont portées aujourd'hui, les géomètres s'appliquoient beaucoup à la construction des équations, et faisoient tous leurs efforts pour effectuer cette construction par les courbes les plus simples, ou les plus faciles à décrire; c'est ainsi que *Halley* donna une méthode pour construire les équations du troisième et du quatrième degré par le cercle et la parabole, et cette méthode a quelqu'avantage sur celle du numéro 160, en ce que le cercle qui remplace une des paraboles, se trace par un mouvement continu; mais le peu d'usage que l'on fait à présent des constructions nous a dispensés des détails à cet égard, et nous terminerons en conséquence ce traité par l'exposition d'une méthode qui réunit à l'avantage de s'appliquer aux équations d'un degré quelconque, celui de peindre les résultats obtenus analytiquement par la théorie de la composition des équations.

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'équation à construire soit seulement $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$; nous ferons

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Puisque dans les points où la courbe représentée par cette dernière équation rencontrera l'axe des abscisses, on aura $y = 0$, il s'ensuit que les abscisses de ces points seront les racines de l'équation proposée. La question sera donc réduite à construire la courbe dont il s'agit,

ce qui est facile, après avoir rendu son équation homogène en y restituant les puissances de l'unité (67). On obtiendra en effet

$$y = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3},$$

résultat dont chaque terme se construiroit séparément par les lignes proportionnelles (64); mais voici un moyen de lier entre elles d'une manière commode les différentes opérations.

On mènera, fig. 62, l'axe AB des abscisses; par l'origine A on élèvera perpendiculairement à cet axe la droite AC, qui sera celui des y; et ayant pris sur le premier la partie $AD = n$, et mené DE parallèle à AC, on portera sur cette dernière des parties FIG. 62.

$$AF = a,\ FG = b,\ GH = c,\ HI = d;$$

on tirera ensuite IK parallèle à AB; on joindra les points H et K par une droite qui coupera en L la ligne PR élevée perpendiculairement à AB sur l'abscisse $AP = x$; on mènera ML parallèle à AB, pour déterminer sur DE le point M, que l'on joindra avec le point G; par le point N, où MG rencontre PR, on tirera ON parallèle encore à AB, et joignant le point O avec le point F, la droite OF donnera sur PR un point Q tel que $PQ = y$.

En effet, on a par les triangles semblables HKI et $H'LH$,

$$IK\,(n) : H'L\,(x) :: IH\,(d) : HH' = \frac{dx}{n};$$

d'où $$GH' = GH + HH' = c + \frac{dx}{n};$$

des triangles $H'MG$ et $G'NG$, il résulte

$$MH'\,(n) : NG'\,(x) :: GH'\left(c + \frac{dx}{n}\right) : GG' = \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}$$

et par conséquent

$$FG' = FG + GG' = b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2};$$

enfin des triangles $G'OF$, $F'QF$, on conclut

$$OG'(n) : QF'(x) :: FG'\left(b+\frac{cx}{n}+\frac{dx^2}{n^2}\right) : FF' = \frac{bx}{n}+\frac{cx^2}{n^2}+\frac{dx^3}{n^3},$$

ce qui donne pour dernier résultat

$$PQ = AF' = AF + FF' = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3}.$$

On étendra sans peine ce procédé au cas où l'équation proposée aurait un nombre quelconque de termes; et lorsqu'on aura obtenu un nombre de points suffisant pour caractériser la marche de la courbe, on reconnoîtra aisément le nombre de racines réelles dont cette équation est susceptible.

164. Si le cours de la courbe est tel que le représente la ligne *XEGILY*, fig. 63, elle rencontrera cinq fois l'axe des abscisses, et indiquera par conséquent que l'équation dont elle dérive a un pareil nombre de racines réelles : cette équation ne pourra être d'un degré inférieur au cinquième. L'équation à construire sera

FIG. 63.

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} = 0 \quad (1).$$

et celle de la courbe.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

Il est évident que les valeurs numériques de l'ordonnée y, ne sont autre chose que les résultats qu'on tire de l'équation proposée (1), en donnant à x les valeurs correspondantes aux différentes abscisses qu'on a choisies arbitrairement. La courbe *XEGILY* offre donc en quelque sorte l'équivalent du tableau dans lequel ces résultats seroient inscrits, mais avec cet avantage qu'en vertu de la loi de *continuité*, qu'on sent bien mieux dans les lignes que dans les nombres, les intervalles entre deux substitutions successives se remplissent avec la plus grande facilité. Ayant calculé, par exemple, les ordonnées PP', QQ', RR', assez proches les unes des autres, et joignant leurs extrémités par un trait continu, *sans*

angles ni jarrets, on a d'une manière assez exacte les ordonnées intermédiaires.

Nous observerons 1°. que puisque l'équation de la courbe ne renferme que des puissances entières et positives de x, chaque valeur de cette indéterminée ne donnera pour y qu'une seule valeur qui sera finie ou limitée tant que x le sera, mais que y sera susceptible de prendre des accroissemens indéfinis ou illimités, lorsque x en recevra de tels, et que par conséquent la courbe $XEGILY$ doit s'étendre à l'infini de chaque côté de l'axe AC des y.

2°. L'inspection seule de la figure fait voir que la courbe $XEGILY$ ne s'auroit passer d'un côté de l'axe AB à l'autre sans rencontrer cet axe, ou analytiquement parlant, que l'ordonnée y ne peut changer de signe sans devenir nulle (*) ; d'où il suit que *si deux substitutions faites dans l'équation* (1), *donnent deux resultats de signe contraire, il y a nécessairement une racine réelle comprise entre les valeurs de* x *employées dans ces substitutions.*

3°. Si l'on prend sur la même courbe deux points placés du même côté par rapport à l'axe AB, il y aura toujours entre eux un nombre pair d'intersections de la courbe et de cet axe : on en voit en effet deux entre E et I, quatre entre E et Y, ou entre X et L, etc. ou bien il n'y en aura aucunes, ainsi que cela arrrive entre P et I. Au contraire, il y aura certainement un nombre impair d'intersections si les points que l'on considère sont placés de différens côtés, comme le sont X et E, X et I, X et Y, etc. De là résulte cette proposition analytique : *entre deux valeurs de* x, *qui, par leur subs-*

(*) Cela est vrai dans ce cas, parce que l'expression de y est sans dénominateur, car si on avoit $y = \frac{a}{x}$, la succession des valeurs $x = +1$, $x = 0$, et $x = -1$, donneroit $y = +a$, $y = \frac{a}{0}$ ou infinie, et $y = -a$. C'est ainsi que les branches de l'hyperbole sont liées entre elles.

titution dans l'équation proposée, donnent deux résultats de même signe, il ne peut y avoir qu'un nombre pair de racines reelles, et il y en aura un nombre impair si ces résultats sont de signes differens.

4°. Enfin il arrive quelquefois que par suite des relations que peuvent avoir entre eux les coefficiens a, b, c, d, e, f, etc. deux intersections consécutives, comme K et M, se rapprochant continuellement, viennent à se confondre, et la partie $IKLMY$ de la courbe prenant la forme du trait ponctué $IL'Y$, ne fait plus que toucher l'axe AB; alors les deux racines représentées par AK et AM, deviennent égales entre elles et à l'abscisse AL'. On voit facilement que si l'équation proposée n'avoit pas d'autres racines réelles, la courbe qui en dérive ne couperoit son axe nulle part, et qu'on ne pourroit par conséquent faire changer de signe le premier membre de cette équation, par aucune substitution. Il n'en seroit pas de même dans le cas où trois intersections se réuniroient. La courbe couperoit au moins une fois l'axe, soit avant, soit après; et pour s'en convaincre, il suffit de voir ce qui resteroit de cette courbe si les trois points H, K et M, ou F, H et K, venoient à se confondre. En suivant ces considérations, on trouvera que, par la réunion d'un nombre pair d'intersections, la courbe dérivée de l'équation (1) peut se trouver toute entière d'un même côté de l'axe, mais que cette circonstance n'a jamais lieu lorsque le nombre des intersections, confondues en une seule, est impair; et on conclura de là que lorsqu'une équation n'a pour racines réelles qu'un nombre pair de racines égales, il est impossible d'en reconnoître l'existence par aucune substitution.

Pour bien saisir ce qui précède, il suffira de faire les figures qui se rapportent aux différens cas que nous avons examinés, ce qui n'offre aucune difficulté, et l'on y verra, pour ainsi dire, la peinture de la théorie des équations exposée dans les *Élémens d'Algèbre*.

APPENDICE

Contenant les premiers Principes de l'Application à l'Algèbre, aux Surfaces courbes et aux Courbes à double courbure.

OBSERV. Je crois devoir prévenir les Lecteurs peu habitués à ce genre de considérations, qu'ils trouveront dans le *Complément des Elémens de Géométrie*, les notions préliminaires indispensables pour l'intelligence de ce qui va suivre.

Équations du plan et de la ligne droite.

165. LA manière la plus commode de fixer la position d'un point quelconque M dans l'espace, fig. 64, est de le projeter d'abord sur un plan BAC donné de position, en abaissant sur ce plan la perpendiculaire MM', et de rapporter ensuite la projection M', à deux axes AB et AC, perpendiculaires entre eux, par les coordonnées AP et PM'. Cela revient à rapporter le point lui-même aux trois plans BAC, BAD et DAC, perpendiculaires entr'eux; car les coordonnées AP et PM', situées dans le plan BAC, représentent les distances MM''' et MM'' du point proposé M, aux deux autres plans DAC et BAD. Les droites AB, AC, AD, suivant lesquelles les plans coordonnés BAC, BAD, DAC, se coupent deux à deux, sont les axes FIG. 64.

des coordonnées ; et on les distingue entr'elles par la lettre qui marque la coordonnée qui leur est parallèle. Ainsi, en faisant $AP = x$, $PM' = y$, $MM' = z$, la ligne AB sera l'axe des x, la ligne AC, celui des y, et la ligne AD, celui des z.

Les plans coordonnés reçoivent eux-mêmes des dénominations semblables. Le plan BAC s'appellera le plan des x et y, parce qu'il contient les coordonnées x et y. La projection M'' du point M, sur le plan BAD, étant rapportée aux deux axes AB et AD, par les coordonnées $AP = x$ et $PM'' = MM' = z$, ce plan sera désigné sous le nom de plan des x et z. Enfin la projection M''' du point M, sur le plan DAC, étant rapportée aux axes AC et AD, par les coordonnées $AR = PM' = y$ et $RM''' = M'M = z$, ce plan sera désigné sous le nom de plan des y et z.

Il faut observer, 1°. que les coordonnées y et z sont nulles en même temps pour tous les points de l'axe des x, AB ; qu'il en est de même de x et de z relativement à l'axe des y, AC, et de x et de y relativement à l'axe des z, BD :

2°. Que pour tous les points du plan BAC, la coordonnée z est nulle, et qu'elle a une valeur constante dans tous ceux d'un plan quelconque, parallèle à ce premier ; en sorte que cette équation, $z = c$, lorsqu'elle est seule et qu'on n'a aucune autre détermination relativement aux deux coordonnées restantes x et y, doit être regardée comme désignant tous les points du plan mené parallèlement à BAC, à une distance égale à c. On verra de même que y est nulle pour tous les points du plan BAD, et que l'équation du plan qu'on mèneroit parallèlement à ce premier, à une distance b, seroit $y = b$.

Si on réunit ensemble les deux équations $z = c$ et $y = b$, c'est-à-dire, si on suppose qu'elles aient lieu en même temps, elles désigneront une droite parallèle à

l'axe des x, et menée par le point du plan des y et z, dont les coordonnées sont c et b; car il est facile de voir que cette droite peut être regardée comme l'intersection de deux plans respectivement parallèles aux plans BAC, BAD.

Enfin, dans le plan DAC, la coordonnée x sera toujours nulle, et $x = a$ sera l'équation du plan parallèle à ce premier, mené à une distance égale à a. Les trois équations $z = c$, $y = b$, $x = a$, étant réunies, ne peuvent plus appartenir qu'au point qui se trouve dans l'intersection des trois plans respectivement parallèles à chacun des plans coordonnés.

166. Examinons maintenant ce que signifieroit une seule équation, entre deux des trois indéterminées x, y et z, et prenons pour exemple $z = Ax$. Nous verrons d'abord (83) que cette équation appartient à une droite AN'', *fig.* 65, menée dans le plan des x et z, BAD; mais elle a encore un sens plus étendu; car si on conçoit que la droite AN'' se meuve parallèlement à elle-même le long de l'axe des y, AC, dans quelque position qu'elle s'arrête, l'ordonnée z, ou $M'm$, prise au point quelconque M' situé sur la droite PM', parallèle à AC, sera égale à l'ordonnée Pm'', correspondante, dans le plan BAD, à l'abscisse $AP = RM'$. La droite AN'', par le mouvement que nous lui supposons, décrit le plan $N''AC$, passant par les droites AN'' et AC; on aura donc $z = Ax$ pour tous les points de ce plan. On trouveroit des conséquences analogues pour les autres plans coordonnés, en prenant des équations entre les indéterminées qu'ils contiennent; mais il vaut mieux passer tout de suite à un cas plus général, et considérer l'équation $z = Ax + By$. FIG. 65.

En y faisant $y = 0$, il viendra $z = Ax$, et nous en conclurons que la droite AN'', qui se trouve comprise dans cette dernière, renferme tous les points que la surface représentée par l'équation $z = Ax + By$

a de communs avec le plan coordonné BAD, sur lequel y est toujours nul, ou, ce qui revient au même, est l'intersection de ce plan, avec la surface proposée.

Lorsqu'on fait $x = 0$, on obtient $z = By$, équation qui appartient à une droite AN''' menée par l'origine A, dans le plan DAC, et qui est l'intersection de ce plan, avec la surface représentée par l'équation $z = Ax + By$.

Si maintenant on conçoit que la ligne AN''' se meuve parallèlement à elle-même le long de AN'', elle décrira le plan $N'''AN''$, et quand elle sera parvenue dans une position quelconque $m''M$, la portion Mm de l'ordonnée $M'M$ sera égale et parallèle à Rm''', et on aura par conséquent

$$M'M = Pm'' + Rm''' = Ax + By = z;$$

d'où il résulte que le plan $N'''AN''$ passant par les lignes AN'' et AN''', dont les équations sont

$$z = Ax, \; z = By$$

a lui-même pour équation

$$z = Ax + By.$$

Si le plan proposé, au lieu de passer par l'origine A, se trouvoit dans une position $G'''EG''$, déterminée par les lignes EG'', EG''', respectivement parallèles à AN'' et à AN''', il seroit parallèle à $N'''AN''$, et en prolongeant l'ordonnée de celui-ci jusqu'à ce qu'elle rencontrât le premier, on auroit

$$M'L = M'M + ML = M'M + AE;$$

en nommant donc D la distance AE, et z l'ordonnée $M'L$, il viendroit, d'après ce qui précède,

$$z = Ax + By + D.$$

Telle est l'équation d'un plan mené dans une position quelconque : il est aisé de se convaincre qu'elle

représente l'équation générale du premier degré à trois indéterminées ; car cette dernière ne peut être que de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$; et en la divisant par γ, elle rentrera dans la première lorsqu'on aura posé

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = A, \qquad -\frac{\beta}{\gamma} = B, \qquad -\frac{\delta}{\gamma} = D.$$

On voit donc que le coefficient γ n'ajoute rien à la généralité de l'équation ; je le conserverai néanmoins pour rendre les formules plus symétriques, et je représenterai l'équation d'un plan quelconque par.....

$$Ax + By + Cz + D = 0 ;$$

mais il faudra se rappeler que, dans tous les résultats, il y aura une des constantes qu'on pourra supposer égale à l'unité, ou déterminer par des conditions particulières.

167. En faisant successivement x, y et z nuls dans l'équation de ce plan, on trouvera qu'il coupe celui des y et z dans une ligne dont l'équation est $Ay + Cz + D = 0$, celui des x et z, dans une ligne dont l'équation est $Bx + Cz + D = 0$, et enfin celui des x et y dans une ligne ayant pour équation $Ax + Cy + D = 0$.

L'étendue des plans étant indéfinie, il faut concevoir que le plan $G''EG'$ soit prolongé derrière les plans coordonnés BAD, DAC ; il rencontrera alors le plan BAC, et passera au-dessous. Toutes ces circonstances peuvent se lire dans son équation, en observant que chacune des indéterminées x, y et z doit être prise positivement et négativement, et que si les parties AB, AC et AD, fig. 64, des axes des coordonnées, répondent aux valeurs positives de ces quantités, les parties opposées Ab, Ac et Ad répondront aux valeurs négatives. Cela peut se prouver immédiatement par le cours des lignes situées dans les plans BAC, BAD et CAD ; on y parviendroit encore en transportant chacun de ces plans FIG. 64.

parallèlement à lui-même, de manière à rendre positives les ordonnées négatives qui lui sont perpendiculaires, et on raisonneroit alors comme on a fait à l'égard des lignes (72).

Il suit de là qu'on peut distinguer dans lequel des huit angles trièdres que les plans coordonnés forment autour du point A, tombe un point proposé, par le moyen des signes dont ses coordonnées sont affectées; il suffit pour cela de remarquer que lorsqu'on prend

$+x$, $+y$, $+z$, dans l'angle $ABCD$, on a

$+x$, $+y$, $-z$, dans l'angle $ABCd$,
$+x$, $-y$, $+z$, dans l'angle $ABDc$,
$-x$, $+y$, $+z$, dans l'angle $ACDb$,
$+x$, $-y$, $-z$, dans l'angle $ABcd$,
$-x$, $-y$, $+z$, dans l'angle $ADbc$,
$-x$, $+y$, $-z$, dans l'angle $ACbd$,
$-x$, $-y$, $-z$, dans l'angle $Abcd$.

168. Une ligne droite est donnée toutes les fois qu'on connoît deux plans qui la contiennent, et dont elle est alors l'intersection, parce que les coordonnées de ses points sont communes aux équations de ces plans. Soient donc

$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots\ldots (1),$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \ldots\ldots (2),$$

les équations des plans donnés; en regardant les indéterminées x, y et z, comme ayant la même valeur dans ces deux équations, il n'en restera qu'une qu'on puisse prendre arbitrairement, et les deux autres calculées en conséquence de la première, feront connoître la position des différens points de la droite proposée.

Les équations (1) et (2) ne sont pas les seules qui puissent représenter la droite proposée ; car elle se trouve dans une infinité de plans différens ; mais on choisit ordinairement parmi toutes les équations qu'elle pourroit avoir, celles qui ne renferment que deux des coordonnées x, y et z.

En éliminant successivement x, y et z, entre les équations (1) et (2), on obtiendra les trois suivantes :

$$(AB'-A'B)y-(CA'-C'A)z+AD'-A'D=0,$$
$$(BC'-B'C)z-(AB'-A'B)x+BD'-B'D=0,$$
$$(CA'-C'A)x-(BC'-B'C)y+CD'-C'D=0,$$

qui deviendront

$$\gamma y-\beta z+\delta=0\ldots\ldots(3),$$
$$\alpha z-\gamma x+\varepsilon=0\ldots\ldots(4),$$
$$\beta x-\alpha y+\zeta=0\ldots\ldots(5),$$

en faisant, pour abréger,

$$AB'-A'B=\gamma,\quad CA'-C'A=\beta,\quad BC'-B'C=\alpha,$$
$$AD'-A'D=\delta,\quad BD'-B'D=\varepsilon,\quad CD'-C'D=\zeta.$$

Deux quelconques de ces équations suffisent pour remplacer les équations (1) et (2), et comprennent implicitement la troisième. En effet, si on multiplie l'équation (3) par α, l'équation (4) par β, l'équation (5) par γ, et qu'on ajoute les produits, on trouvera

$$\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\zeta=0,$$

résultat que la substitution des valeurs de α, β, γ, δ, ε et ζ, rendra identique, ou qui exprimera la condition que doivent remplir ces quantités, pour que les équations (3), (4) et (5), étant données *à priori*, puissent appartenir à la même ligne droite.

L'équation (3) qui renferme la relation que doivent avoir entre elles les coordonnées y et z, pour tous les points de la droite proposée, appartient à l'ensemble

des projections de ces points sur le plan des y et z, et est par conséquent l'équation de la projection de la droite proposée, sur ce plan (*Compl. des Élém. de Géom.* n°. 4). On verra de même que l'équation (4) appartient à la projection de cette droite, sur le plan des x et z; et enfin que l'équation (5) est celle de sa projection sur le plan des x et y. Deux quelconques de ces projections étant données, la droite est entièrement déterminée; cela est évident par l'analyse précédente, et parce que la droite proposée, n'est autre que l'intersection de deux quelconques des plans projetans (*Compl.* 5), plans dont l'équation est la même que celle de la projection sur laquelle ils sont élevés (166).

169. L'équation générale du plan ne renfermant que trois constantes nécessaires, il suffit d'un pareil nombre de conditions pour la particulariser. Nous allons examiner successivement celles de ces conditions qui se rencontrent le plus fréquemment, et nous traiterons en même tems les questions analogues, relativement aux lignes droites.

Proposons-nous d'abord de faire passer un plan par trois points, dont les coordonnées soient

$$x', y', z',\ x'', y'', z'',\ x''', y''', z''';$$

nous mettrons successivement

x', x'', x''', au lieu de x,
y', y'', y''', au lieu de y,
z', z'', z''', au lieu de z,

dans l'équation générale du plan,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

et il viendra les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0, \end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera les quantités $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, et on trouvera

$$\frac{A}{D}=\frac{z'(y''-y''')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$\frac{B}{D}=\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z''')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$\frac{C}{D}=\frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}.$$

Il est aisé de voir que si on vouloit déterminer les équations des projections d'une droite qui passe par deux points donnés, on y parviendroit d'une manière analogue, en substituant les coordonnées de ces points dans les équations générales $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, et on trouveroit ainsi

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'),\ y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z') \quad (84).$$

170. Pour reconnoître quand deux lignes données sont dans un même plan, ou, ce qui revient au même, se coupent, il faut s'assurer si les indéterminées x, y et z peuvent être communes aux quatre équations des projections de ces droites (*Compl.* 19). Or, il est évident qu'en éliminant x, y et z, il restera une équation qui exprimera la condition sans laquelle les équations des droites proposées ne sauroient avoir lieu pour le même point. Représentons par

$$\left.\begin{matrix} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=a'z+\alpha' \\ y=b'z+\beta' \end{matrix}\right\}$$

les équations de ces droites, nous en tirerons sur-le-champ

$$az+\alpha=a'z+\alpha', \qquad bz+\beta=b'z+\beta'.$$

et éliminant z, il viendra

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

171. Deux plans qui sont parallèles ont leurs communes sections, avec chaque plan coordonné, respectivement parallèles entre elles (*Compl.* 15); mais si $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, représentent les équations de ces deux plans, leurs communes sections respectives avec les plans des x et z, et des y et z, auront pour équations

$$\begin{aligned} Ax+Cz+D&=0, \quad & A'x+C'z+D'&=0,\\ By+Cz+D&=0, \quad & B'y+C'z+D'&=0, \end{aligned}$$

et ne seront parallèles deux à deux que lorsqu'on aura

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'}, \qquad \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'} \qquad (85).$$

Tirant de ces dernieres les valeurs de A' et de B', on aura pour l'équation du plan parallèle au premier,

$$\frac{C'}{C}(Ax+By+Cz)+D'=0.$$

Reste D' à déterminer dans ce résultat; or en supposant que le plan cherché doive passer par un point dont les coordonnées soient x', y' et z', on aura

$$\frac{C'}{C}(Ax'+By'+Cz')+D'=0;$$

retranchant cette équation de la précédente, D' disparoîtra, et divisant alors par $\frac{C'}{C}$, il viendra

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Il est à propos de remarquer qu'en regardant A, B, C comme des quantités quelconques, l'équation ci-dessus sera commune à tous les plans qui passent par le point proposé.

Puisque deux droites sont parallèles lorsque leurs projections sur chacun des plans coordonnés, sont respectivement parallèles (*Compl.* 20), leurs équations seront, dans ce cas, de la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= az+\alpha \\ y &= bz+\beta \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= az+\alpha' \\ y &= bz+\beta' \end{aligned}\right\}.$$

Si la seconde doit passer par le point dont les coordonnées sont x', y' et z', on aura, pour déterminer α' et β', les équations

$$x' = az' + \alpha' \quad \text{et} \quad y' = bz' + \beta',$$

dont on tirera, en opérant comme tout-à-l'heure,

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

172. Pour trouver l'équation d'un plan perpendiculaire à une droite donnée, il faut se rappeler que les communes sections de ce plan, avec chacun des plans coordonnés, sont perpendiculaires aux projections de la droite donnée (*Compl.* 32). Soient $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, les équations de cette droite, et $Ax+By+Cz+D=0$, celle du plan cherché ; les communes sections de ce dernier, sur le plan des x et z, et des y et z, seront représentées par

$$Ax + Cz + D = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{Cz}{A} - \frac{D}{A},$$

$$By + Cz + D = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{Cz}{B} - \frac{D}{B},$$

et pour que ces droites soient perpendiculaires aux projections de la droite donnée, il faudra qu'on ait

$$a = \frac{A}{C}, \qquad b = \frac{B}{C} \qquad (86).$$

Substituant les valeurs de A et de B, tirées de ces équations, dans celle du plan cherché, on aura

$$C(ax + by + z) + D = 0;$$

et si ce plan doit passer par le point dont les coordon-

nées sont x', y' et z', son équation deviendra

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Si l'équation du plan étoit donnée, et qu'on demandât celle de la droite qui lui est perpendiculaire, il faudroit alors remplacer a et b par les valeurs données ci-dessus, il viendroit

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\quad y-y'=\frac{B}{C}(z-z');$$

pour les équations de la droite perpendiculaire au plan représenté par $Ax+By+Cz+D$, et assujétie à passer par le point dont les coordonnées sont x', y' et z'.

FIG. 64. 173. La distance du point M, *fig.* 64, dont les coordonnées sont x, y et z, à l'origine A, a pour expression $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (*Compl.* 24.) Ceci nous conduit naturellement à l'équation de la surface de la sphère; car tous ses points devant être également éloignés de son centre, si on suppose que le centre soit l'origine même des coordonnées, et que le rayon soit représenté par r, l'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$ aura lieu pour un point quelconque de la surface proposée.

Lorsque les coordonnées du centre seront x', y' et z', on aura

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2;$$

car si m désigne ce point, et qu'on prenne $PO=pm'$, $M'N=m'm$, les triangles rectangles $m'OM'$ et mNM donneront

$$\overline{m'M'}^2=\overline{m'O}^2+\overline{M'O}^2,\quad \overline{mM}^2=\overline{mN}^2+\overline{MN}^2;$$

mais $m'O=x-x'$, $M'O=y-y'$, $MN=z-z'$, $mN=m'M'$, et par conséquent la distance des deux points m et M aura pour expression

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

174. Ce qui précède va nous conduire d'une manière très-simple à l'expression du cosinus de l'angle que font entre elles deux droites données. Soient

$$\left.\begin{aligned} x-x' &= a(z-z') \\ y-y' &= b(z-z) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x-x' &= a'(z-z') \\ y-y' &= b'(z-z') \end{aligned}\right\}$$

les équations des projections de ces droites qui se coupent au point dont les coordonnées sont x', y' et z'; si on imagine qu'elles se meuvent parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce que leur point d'intersection soit à l'origine, leur angle ne changera pas, et les équations ci-dessus se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} x &= az \\ y &= bz \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= a'z \\ y &= b'z \end{aligned}\right\}.$$

Concevons maintenant une sphère qui ait son centre à l'origine, et dont le rayon soit représenté par r; la distance des points où sa surface coupera chacun des côtés de l'angle cherché, sera évidemment la corde de cet angle. On trouvera les coordonnées du point de rencontre de la première droite avec la surface de la sphère, en déterminant x, y et z, par les équations de cette droite et par celle de la sphère; et on aura ainsi

$$x=\frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, y=\frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, z=\frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

nommant x', y' et z', les coordonnées du point de rencontre de la seconde droite avec la surface de la sphère, on aura de même

$$x=\frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}} y'=\frac{b'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}} z=\frac{r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

L'expression du quarré de la distance de ce point au précédent, sera $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$;

en y mettant pour $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, leurs valeurs, on trouvera pour résultat, après les réductions,

$$r\left[2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\ (1+a'^2+b'^2)}}\right];$$

mais on sait que le quarré de la corde d'un angle quelconque V, est égal au produit du sinus-verse multiplié par le diamètre : on aura donc $2(1-\cos V) = 2-2\cos V$ pour la valeur de ce quarré, et comparant avec l'expression trouvée ci-dessus, dans laquelle on fera $r=1$, il viendra

$$\cos V = \frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\ (1+a'^2+b'^2)}}.$$

Il sera facile de déduire de là

$$\sin V = \frac{\sqrt{(a'b-ab')^2+(a'-a)^2+(b-b')^2}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\ (1+a'^2+b'^2)}}$$

Pour que les deux droites proposées soient perpendiculaires, il faudra qu'on ait $\cos V = 0$, et par conséquent $1+aa'+bb'=0$.

175. Le cosinus de l'angle que deux plans quelconques font entr'eux, se déduit immédiatement de l'expression qu'on vient de trouver ; car cet angle est égal à celui que font deux droites, menées perpendiculairement à chacun des plans proposés, par un point quelconque de leur commune section (*Compl.* 46). Représentons les équations de ces plans par

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad Ax'+By'+Cz'+D'=0 ;$$

si on conçoit qu'ils se meuvent parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce qu'ils soient parvenus à l'origine des coordonnées, leur angle ne changera pas, et leurs équations se réduiront à

$$Ax+By+Cz=0, \quad Ax'+By'+Cz'=0 ;$$

celles des droites qu'on mènera perpendiculairement à chacun d'eux, par ce point, seront (172)

$$x=\frac{A}{C}z, \qquad x=\frac{A'}{C'}z,$$

$$y=\frac{B}{C}z, \qquad y=\frac{B'}{C'}z;$$

substituant dans l'expression de cos V, au lieu de a et b, a' et b', les valeurs que donnent ces équations, il viendra

$$\cos V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\ (A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Si l'un des plans proposés, le second, par exemple étoit celui des x et y, pour lequel on a toujours $z=0$; il est évident que A' et B' deviendroient nuls dans cette supposition, et que cos V se réduiroit à

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

On trouvera de même que le cosinus de l'angle, formé par le premier plan proposé avec celui des x et z, pour lequel on a $y=0$, $A'=0$ et $C'=0$, sera

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

et que le cosinus de l'angle du même plan avec celui des y et z, pour lequel $x=0$, $B'=0$, $C'=0$, sera

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dans le cas où les deux plans proposés seroient perpendiculaires entre eux, on auroit cos $V=0$, et par conséquent $AA'+BB'+CC'=0$.

176. Les surfaces, de même que les lignes, se

divisent en ordres, suivant le degré de leurs équations ; le plan est la surface du premier ordre, parce que son équation ne monte qu'au premier degré. Les surfaces du second ordre sont toutes comprises dans l'équation.

$$\left.\begin{matrix} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz \\ +2Gx+2Hy+2Kz \end{matrix}\right\}=L^2$$

qui est la plus générale qu'on puisse former dans le second degré avec les trois indéterminées x, y et z.

En résolvant cette équation par rapport à l'une de ces lettres, par rapport à z, par exemple, on trouvera

$$z=-\frac{Ex+Fy+K}{C}\pm$$

$$\frac{1}{C}\sqrt{\{(K^2+CL)+2(FK-CH)y+2(EK-CG)^2x}$$

$$+2(F^2-BC)y^2+2(EF-CD)xy+(E^2-AC)x^2\}.$$

Ce résultat fait voir qu'au même point du plan des x et y, répondent deux points sur la surface proposée, et que par conséquent chacune des valeurs de z produit par la substitution de toutes les valeurs possibles de x et de y, une portion de surface qui est, par rapport à la surface totale, ce que sont les branches d'une courbe à l'égard de cette courbe ; on donne à ces portions le nom de *Nappes*.

On remarquera d'abord que la partie rationnelle de la valeur de z exprime l'ordonnée d'un plan, qui partage la surface en deux parties symétriques ; car si on faisait partir les ordonnées de ce plan en posant

$$z+\frac{Ex+Fy+K}{C}=u,$$

la nouvelle ordonnée u aurait deux valeurs égales, l'une positive et l'autre négative. Le plan dont il s'agit est donc, à l'égard des surfaces du second degré, ce

qu'est un diamètre par rapport aux courbes de ce degré.

On se feroit difficilement l'idée de la forme que doit affecter une surface dont on a l'équation, si on n'en considérait que des points isolés ; mais au lieu de cela, on imagine une infinité de sections faites dans cette surface par des plans, que pour plus de simplicité on prend parallèles à l'un des plans coordonnés : le cours de ces diverses courbes étant connu, leur continuité fait concevoir la forme de la surface proposée.

Tous les points d'un plan mené parallèlement à celui des x et y, à une distance désignée par a, étant compris dans l'équation $z = a$, si on substitue cette valeur dans l'équation générale des surfaces du second degré, elle deviendra

$$\left.\begin{matrix} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ +2(Ea+G)x+2(Fa+H)y \end{matrix}\right\} = L^2 - 2Ka - Ca^2$$

exprimera la relation qu'ont entre elles les coordonnées du plan des x et y pour les points de la surface proposée, distans de ce plan de la quantité a, et appartiendra donc sur le plan des x et y, à la projection de la courbe, dans laquelle le plan dont l'équation est $z = a$, rencontre la surface du second degré ; et comme ce plan est parallèle à celui des x et y, il est évident que la section faite dans la surface même ne différera pas de sa projection sur le plan des x et y.

En prenant pour a diverses valeurs, on aura les diverses sections parallèles au plan des x, y; si l'on fait $a = 0$, l'équation résultante

$$\left.\begin{matrix} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ +2Gx+2Fy \end{matrix}\right\} = L^2$$

donnera la courbe du second degré, dans laquelle la surface rencontre le plan des x, y. On détermineroit

de la même manière les équations des sections parallèles au plan des x et z et à celui des y et z.

On conçoit facilement, et on en a d'ailleurs vu l'exemple sur la sphère (173), que les surfaces, suivant qu'elles sont placées d'une manière plus ou moins symétrique par rapport aux axes des coordonnées, ont des équations plus ou moins simples, et que par conséquent pour faire l'analyse des différentes espèces de surfaces, que peut représenter l'équation générale de celles du second degré, il faut d'abord la débarrasser des termes qui ne dépendent que de la situation particulière des axes des coordonnées, ce qui peut se faire, soit en discutant le radical, d'une manière analogue à celle qu'on a suivie pour les lignes du second degré dans les n°s. 107 — 114, soit en construisant des formules générales pour la transformation des coordonnées dans l'espace, et en employant, comme dans les n°s. 118 — 120, les quantités relatives à la position des axes, à simplifier autant qu'il est possible l'équation générale. On peut consulter pour ces détails, qui sortent entièrement des Élémens, le chap. V du premier vol. de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*.

177. Je ferai remarquer seulement qu'on peut tirer du n°. 174, l'équation du cône droit, placé dans une situation quelconque par rapport aux plans coordonnés.

En effet, le cône droit étant engendré par le mouvement d'une droite assujettie à tourner autour d'un autre, en faisant avec elle un angle constant, si on désigne par α, β, γ, les coordonnées du sommet, qu'on prenne pour la droite fixe ou l'axe du cone, les équations

$$x-\alpha = a(z-\gamma),$$
$$y-\beta = b(z-\gamma),$$

pour la droite mobile ou le côté du cône, les équations

$$(x-\alpha) = a'(z-\gamma)$$
$$(y-\beta) = b'(z-\gamma)$$

le cosinus de l'angle de ces deux droites sera

$$\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}};$$

comme il doit être constant, on le représentera par c, et on observera qne a, b appartenant à l'axe désignent des quantités connues, et que

$$a'=\frac{(x-\alpha)}{z-\gamma}\quad,\ b'=\frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

En substituant ces valeurs, on formera l'équation

$$\frac{1+a\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+b\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)}{\sqrt{\left(1+a^2+b^2\right)\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)^2\right]}}=c,$$

qui se réduit facilement à

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\beta)+(z-\gamma)}{m\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}=c$$

en faisant pour abréger $\sqrt{1+a^2+b^2}=m$.

Si on place le sommet à l'origine des coordonnées, on aura

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0$$

et

$$\frac{ax+by+z}{m\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c.$$

Si on fait coïncider l'axe du cône avec l'axe des z, il viendra $a=0$, $b=0$, $m=1$, puisqu'on a sur cet axe $y=0$, $x=0$, quel que soit z; et l'équation ci-dessus se réduit à

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c,$$

de laquelle on tire, par l'élévation au quarré,

$$z^2(1-c^2) = c^2(x^2+y^2).$$

En faisant dans cette équation $z = n$, elle devient

$$n^2(1-c^2) = c^2(x^2+y^2)$$

équation qui appartient à un cercle dont le centre est dans l'axe des z, et dont le rayon est $\frac{n\sqrt{1-c^2}}{c}$. Il résulte de-là que toutes les sections du cône droit par un plan parallèle à celui des x et y, sont des cercles, ce qui est d'ailleurs évident par la nature de ce cône.

On tire de l'équation ci-dessus

$$z = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2};$$

il est facile de voir que $\sqrt{1-c^2}$ est le sinus de l'angle que fait le côté du cône avec l'axe des z, et que par conséquent $\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ est la cotangente de cet angle ou la tangente de celui que la même droite fait avec le plan des x, y.

Si on vouloit que le sommet du cône fut à un point quelconque de l'axe des z, cet axe coïncidant toujours avec celui du cône, on auroit

---

(*) Il est aisé de voir que si l'on faisoit $z = 0$, dans cette équation, le résultat qui appartiendroit à la section du cône par le plan des x et y, prendroit la forme de l'équation générale du second degré à deux inconnues, et qu'on pourroit par ce moyen montrer *algébriquement*, l'identité des courbes du second degré avec les sections faites dans un cône droit par un plan; mais cette voie seroit beaucoup plus compliquée et moins générale que celle qu'on a suivie dans les num. 144 — 147, puisqu'on y a considéré un cône quelconque. D'ailleurs, le calcul pour un cône oblique à base circulaire, se trouve dans l'*appendix de superficiebus*, placé à la fin du second volume de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, imprimée en 1748.

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}.$$

En faisant $z=0$, on obtiendra l'équation de la courbe suivant laquelle le cône rencontre le plan des x, y, et qu'on peut regarder comme la base. Cette équation sera

$$-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

ou

$$\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2}=x^2+y^2;$$

elle appartient à un cercle dont le rayon est

$$\frac{\gamma\sqrt{1-c^2}}{c}.$$

Si on représente par r ce rayon, on aura

$$r^2=\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2}, \text{ et } \gamma=\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}};$$

l'équation

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

se changeant alors en

$$z-\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2-y^2}$$

peut être mise sous la forme

$$z\sqrt{1-c^2}-cr=c\sqrt{x^2+y^2};$$

dans le cas où $c=1$, elle se réduit à

$$r^2=x^2+y^2.$$

178. Cette dernière équation qui ne contient plus que deux des trois coordonnées, appartient néanmoins à la surface cylindrique dans laquelle se transforme le

cône lorsque son sommet s'éloigne à l'infini ; car c désignant le cosinus de l'angle formé par la droite génératrice du cône et son axe, l'hypothèse $c = 1$, rend cet angle nul et établit le parallélisme des deux droites dont il s'agit ; la première en tournant au tour de la seconde, décrit donc la surface d'un cylindre droit perpendiculaire au plan des x et y, et ayant pour base sur ce plan, le cercle dont le rayon est r, et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Ceci nous conduit à observer qu'une équation quelconque qui ne contient que deux des trois coordonnées, et qui ne désigne qu'une courbe sur le plan de ces coordonnées, appartient, dans l'espace, à une surface, puisque la coordonnée qui n'entre point dans cette équation, se trouvant indépendante des deux autres, a une infinité de valeurs pour chaque point du plan cité ; et ces valeurs répondent à tous les points de la droite élevée perpendiculairement au plan coordonné par le point que l'on y considère.

L'ensemble de toutes les droites élevées ainsi sur chaque point de la courbe, constitue une surface *cylindrique*, en prenant cette dénomination dans toute l'étendue qu'on lui assigne dans le *Complément des Élémens de Géométrie.*

Des Courbes considérées dans l'espace.

179. Lorsqu'on envisage les courbes dans l'espace, elles résultent toujours de l'intersection de deux surfaces, de même que la ligne droite résulte de la rencontre de deux plans (168). On peut par exemple indiquer un cercle, en donnant la sphère dont il fait partie et le plan qui la rencontre. En supposant que la sphère ait son centre à l'origine des coordonnées, et que le plan soit quelconque, le système des équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad (1)$$
$$Ax+By+Cz=D \quad (2)$$

appartiendra au cercle suivant lequel se rencontrent la sphère et le plan proposé, puisque ce système ne conviendra qu'aux points qui se trouvent en même temps sur l'une et l'autre surface.

Il est visible qu'on peut transformer le système des équations (1) et (2) en une infinité d'autres qui soient équivalens. Ce qu'on fait le plus communément, c'est d'éliminer alternativement une des trois indéterminées x, y ou z; et l'on obtient, entre ces quantités combinées deux à deux, trois équations qui appartiennent aux projections de la courbe cherchée sur chacun des plans coordonnés.

Dans l'exemple ci-dessus, on a

$$x^2+y^2+\left(\frac{D-Ax-By}{C}\right)^2=r^2$$
$$x^2+z^2+\left(\frac{D-Ax-Cz}{B}\right)=r^2$$
$$y^2+z^2+\left(\frac{D-By-Cz}{A}\right)^2=r^2$$

deux quelconques de ces équations donnent la troisième. elles appartiennent (119) à des ellipses qui sont les projections du cercle sur chacun des plans coordonnés (*Compl.* 63).

Pour concevoir nettement de quelle manière une courbe est représentée par les équations de ses projections, il faut considérer que ces équations appartiennent des surfaces cylindriques élevées perpendiculairement sur les projections (178), de même que les équations des projections d'une droite désignent aussi ses plans projétans.

Il suit de là, que la courbe proposée résulte de

l'intersection des surfaces cylindriques élevées sur deux de ses projections, comme on l'a dit dans le numéro 77 du complément.

Dans le plus grand nombre de cas, l'intersection de deux surfaces courbes ne sauroit avoir tous ses points dans un même plan, et forme alors une courbe à *double courbure*; telle est par exemple l'intersection d'une sphère et d'un cylindre droit, lorsque l'axe du cylindre ne passe pas par le centre de la sphère.

Supposons que la sphère ait son centre à l'origène et que le cylindre ait pour base le cercle ou son axe parallèle à l'axe des z; les équations des surfaces contenant la courbe proposée, seront

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$2ax - x^2 = y^2$$

on aura pour les projections en x, z et en x, y,

$$2ax - x^2 = y^2$$
$$2ax + z^2 = r^2.$$

Cette courbe pourroit se décrire en plaçant une pointe de compas sur la surface du cylindre, et faisant tourner l'autre sur cette surface, avec une ouverture égale au rayon de la sphère.

Pour en trouver tant de points qu'on voudra, il faut déterminer les coordonnées y et z au moyen de l'abscisse x, par les équations des projections, qui donnent

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \quad , z = \sqrt{r^2 - 2ax}.$$

On reconnaît l'étendue de ces courbes en assignant les cas dans lesquels les ordonnées deviennent imaginaires; or, on ne trouve de valeurs réelles pour y que

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2a$,

et pour z,

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{r^2}{2a}$, du côté positif,

et depuis $x = 0$ jusqu'à l'infini du côté négatif.

Mais

Mais il est évident qu'il ne faut prendre que la partie de l'abscisse x, commune aux deux projections, puisqu'il suffit qu'une des coordonnées devienne imaginaire pour que la courbe ait atteint sa limite ; elle ne s'étendra donc que depuis $x = o$ jusqu'à $x = \frac{r^2}{2a}$.

La considération des projections elles-mêmes confirme ce résultat. L'équation en x et y appartenant au cercle $AE'F'e'$, *fig.* 66, qui sert de base au cylindre, et FIG. 66. celle qui renferme x et z, appartenant à la parabole $H''I'h''$, dont le paramètre $= 2a$, et la distance $AI' = \frac{r^2}{2a}$, il est évident qu'on ne peut employer à la description de la courbe proposée que les portions $E'Ae'$ et $H''Ih''$, de ses projections, correspondantes sur l'axe AB à la partie AI'.

180. Enfin, pour s'assurer analytiquement que la courbe proposée n'est pas plane, il faut chercher si elle ne peut être l'intersection de l'un des cylindres élevés sur ses projections, par aucun plan. En désignant par

$$Ax + By + Cz = D$$

l'équation d'un plan quelconque, son intersection avec le cylindre élevé sur la parabole $H''I'h''$ sera représentée par les équations

$$Ax + By + Cz = D$$
$$2ax + z^2 = r^2 ;$$

la projection de cette intersection aura pour équation sur le plan des y et z,

$$A\,\frac{(r^2 - z^2)}{2a} + By + Cz = D,$$

et devra coïncider dans tous ses points avec celle de la courbe proposée sur le même plan des y et z, qui est

$$r^2 - z^2 - \left(\frac{r^2 - z^2}{4a^2}\right)^2 = y^2.$$

Or, on tire de la précédente

$$y = \frac{2aD + Ar^2 - 2aCz - Az^2}{2aB};$$

il faudra donc que pour toutes les valeurs de z, on ait

$$\left(\frac{2aD + Ar^2 - 2aCz - Az^2}{2aB}\right)^2 = r^2 - z^2 - \frac{(r^2 - z^2)^2}{4a^2}.$$

En développant ce résultat, on lui fera prendre la forme

$$Pz^4 + Qz^3 + Rz^2 + Sz + T = 0,$$

les lettres P, Q, R, S et T, désignant des coefficiens formés des quantités A, B, C, D. Pour que cette équation soit vérifiée indépendamment de z, il faut qu'on ait séparément

$$P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,\ S = 0,\ T = 0.$$

On s'assurera par l'élimination qu'aucune de ces cinq équations ne rentre dans les autres, et que par conséquent on ne peut déterminer les quatre coefficiens A, B, C, D, de manière à satisfaire à toutes en même temps; il n'y a donc aucun plan qui puisse comprendre la courbe proposée; et si on vouloit déterminer z par l'équation ci-dessus, on ne pourroit avoir au plus que quatre valeurs, en sorte que la courbe proposée ne peut être coupée par un plan, en plus de quatre points.

ADDITIONS.

OBSERV. La réimpression de cet Ouvrage ayant été commencée il y a plus d'un an, les remarques suivantes que j'ai rassemblées dans ce long intervalle, n'ont pu être insérées à leur place dans le texte.

ADDITION AU N°. 41.

L'APPLICATION qu'on fait ordinairement du procédé de ce n°. suppose que le plan ABC' est horisontal, et cependant il est rare qu'on puisse prendre la base AB dans le plan horisontal. Il seroit très-facile de modifier ce procédé pour le cas où la ligne AB est dans une situation quelconque à l'égard du plan horisontal; mais sans entrer dans ce détail, je ferai remarquer que les angles $C'AB$ et $C'BA$, ne sont que les angles CAB et CBA réduits au plan horisontal (58), et que dans le cas le plus général, il n'y a qu'à réduire au plan horisontal passant par l'une des extrémités de la base suivant le procédé du n°. 58, les angles observés; calculer ensuite la longueur de projection de la base sur ce plan, en multipliant la longueur mesurée sur le terrein, par le cosinus de l'angle que fait la base avec le plan horisontal, et qu'on observe immédiatement.

Il suffit de jetter les yeux sur la figure 67 dans laquelle $A'Bc'$ représente le plan horisontal, pour reconnoître l'exactitude de ce qui précède. FIG. 67.

Détermination d'un point par l'observation des angles compris entre les droites menées de ce point à trois points donnés.

Ce problême étant d'un usage fréquent, dans un moment ou l'on s'occupe beaucoup de la levée des plans et de la rectification des cartes, j'ai cru devoir en placer ici une solution.

Lorsqu'on le considère dans le cas le plus général, il se rapporte à la géométrie dans l'espace, et j'en ai donné la solution graphique dans le *Complément des Élémens de Géométrie;* mais quand les trois angles sont dans un même plan, il y en a toujours un qui est la somme ou la différence des deux autres, ensorte qu'il suffit d'observer ceux-ci pour en conclure le premier; et on peut ramener les autres cas à celui-là, en se servant de la réduction des angles au plan horisontal, enseignée dans le n°. 58.

La solution graphique de ce cas consiste à décrire
FIG. 68. sur les lignes AB et AC, *fig.* 68, deux segmens de cercle capables des angles BDA, CDA, observés au point cherché D, entre les points donnés A et B, A et C. Les circonférences des cercles se couperont d'abord au point qui leur a été rendu commun par la construction, et ensuite au point D qui sera le point demandé. Je n'entrerai pas dans la discussion des différens cas que peut présenter le problême relativement aux diverses situations respectives des points donnés A, B, C et du point cherché D; je me bornerai à faire remarquer que la somme des angles observés BDA, CDA, indique si l'on est placé dans le triangle ABC, ou en dehors. Dans le premier cas elle surpasse deux droits, dans le second elle est moindre; et si elle étoit précisément égale à deux droits, on seroit placé sur la ligne BC. Cela est trop facile à prouver pour que je m'y arrête.

Voici une des manières d'appliquer à ce problême

le calcul trigonométrique. Les données sont les parties du triangle BAC, et les angles observés BDA et CDA : je ferai en conséquence

$$AB = a,\ AC = b,\ BDA = \alpha,\ CDA = \beta,\ BAC = \gamma,$$

et je prendrai pour inconnues

$$ABD = x,\quad ACD = y.$$

Cela posé, les triangles BAD et DAC, donneront

$$\sin BDA : \sin ABD :: AB : AD,$$
$$\sin CDA : \sin ACD :: AC : AD,$$

ou
$$\sin\alpha : \sin x :: a : AD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha},$$

$$\sin\beta : \sin y :: b : AD = \frac{b \sin y}{\sin\beta};$$

et on conclura de là l'équation

$$\frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta},$$

qui revient à

$$a \sin\beta \sin x - b \sin\alpha \sin y = 0.$$

Or, dans le quadrilatère $ABDC$, on a

$$ACD = 4 \text{ angl. droits} - ADB - ADC - BAC - ABD,$$

d'où $y = 4$ angl. droits $- \alpha - \beta - \gamma - x$;

faisant pour abréger

$$4 \text{ angl. droits} - \alpha - \beta - \gamma = \delta,$$

il viendra $y = \delta - x$, et par conséquent

$$a \sin\beta \sin x - b \sin\alpha (\sin\delta \cos x - \cos\delta \sin x) = 0;$$

divisant tout par $\sin x$, on obtiendra

$$a \sin\beta - b \sin\alpha \left(\sin\delta \frac{\cos x}{\sin x} - \cos\delta \right) = 0,$$

d'où on conclura

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{a \sin\beta + b \sin\alpha \cos\delta}{b \sin\alpha \sin\delta}.$$

Si on partage cette expression en deux parties, on aura

$$\cot x = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \sin \delta} + \frac{\cos \delta}{\sin \delta},$$

ou bien $$\cot x = \frac{\cos \delta}{\sin \delta}\left(\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \cos \delta} + 1\right),$$

ou enfin

$$\cot x = \cot \delta \left(\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \cos \delta} + 1\right).$$

Voilà la question résolue, puisqu'avec l'angle x, on a l'angle y et la distance AD.

ADDITION AUX N°s. 113 et 120.

Il faut remarquer que la parabole peut se changer en une ligne droite dans deux circonstances différentes. Si on avoit d'abord $n = 0$ dans le n°. 113, il viendroit

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p}$$

équation qui appartient à deux droites palallèles à l'axe des t. Quand on prend l'équation $\alpha u'^2 - \beta t' = 0$, qui se rapporte à l'axe (120), on ne trouve dans le cas où $\beta = 0$, que l'équation $\alpha u'^2 = 0$; mais cette équation donnant deux fois $u = 0$, reproduit l'axe des abscisses comme la réunion de deux droites qui se confondent en une seule.

L'équation $\alpha u'^2 - \beta t' = 0$ présente encore un autre cas singulier lorsque $\alpha = 0$, car il en résulte $t = 0$, équation qui appartient à une ligne droite perpendiculaire à l'axe des u.

ADDITIONS AUX N°s. 140 ET 141.

On peut simplifier de la manière suivante l'élimination des quantités m, n, p et q, dans cet article.

Les expressions de a'^2 et de b'^2 fournissent les équations

$$a'^2a^2n^2 + a'^2b^2m^2 = a^2b^2, \quad b'^2a^2q^2 + b'^2b^2p^2 = a^2b^2;$$

en y joignant respectivement

$$n^2 + m^2 = 1, \qquad q^2 + p^2 = 1,$$

on aura deux systèmes d'équations, l'un en m^2 et n^2, l'autre en p^2 et q^2. Les formules relatives aux équations du premier degré à deux inconnues appliquées au premier système, donnent sur-le-champ :

$$n^2 = \frac{a^2b^2 - a'^2b^2}{a'^2a^2 - a'^2b^2} = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}$$

$$m^2 = \frac{a'^2a^2 - a^2b^2}{a'^2a^2 - a'^2b^2} = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}.$$

Pour obtenir q^2 et p^2, il suffit de changer a' en b' dans ces valeurs, et il vient

$$q^2 = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}$$

$$p^2 = \frac{a^2(b'^2 - b^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}.$$

L'équation

$$a^2nq + b^2mp = 0$$

revient à

$$a^2nq = -b^2mp,$$

et en la quarrant, on a

$$a^4n^2q^2 = b^4m^2p^2.$$

Si l'on substitue dans cette dernière les valeurs de n^2, m^2, q^2, p^2 réduites, au même dénominateur de la manière la plus simple, en supprimant ce dénominateur, on aura

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2).$$

Développant, réduisant et décomposant en facteurs, il viendra

$$(a^4 - b^4) - (a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = 0;$$

puis supprimant le facteur commun $a^2 - b^2$, on trouvera enfin

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Le calcul est le même dans le n°. 141, en faisant seulement attention aux différens signes que prend la quantité a^2b^2 dans les équations

$$a'^2b^2m^2 - a'^2a^2n^2 = a^2b^2,\quad b'^2b^2p^2 - b'^2a^2q^2 = -a^2b^2,$$

parce qu'il faut dans le passage des valeurs de m^2 et de n^2 à celles de p^2 et de q^2 changer le signe de a^2b^2.

(Cette remarque est du Cit. Puissant.)

ADDITION AUX N°s. 144 ET 146.

Les circonstances dans lesquelles les courbes du second degré changent de nature peuvent se voir dans le cône. En effet si le plan coupant passe par le sommet sans entrer dans le cône, la section se réduit à un point correspondant à celui qu'on a remarqué dans le n°. 110.

Quand le plan coupant, passant toujours par le sommet, entre dans le cône, on a deux lignes droites; et si on écarte ensuite le plan coupant du sommet du cône, en faisant mouvoir ce plan parallèlement à lui-même, on obtiendra une suite d'hyperboles, ayant pour asymptotes les droites ci-dessus, rapportées ou projetées sur le plan de la courbe, par des perpendiculaires à ce plan.

Enfin quand le plan coupant est parallèle au côté du cône, s'il passe par le sommet, il ne fait plus que toucher le cône suivant une ligne droite, mais qu'on doit regarder comme double; car elle est la réunion des deux parties de la parabole, qui s'approchent sans cesse par le rétrécissement que subit cette courbe à mesure que le plan coupant s'approche de son contact avec le cône.

D'un autre côté, plus on éloigne du sommet du cône, mais toujours parallèlement à son côté, le plan coupant, plus la parabole s'ouvre ou s'élargit vers son sommet,

sommet, et tend par conséquent à s'approcher de la ligne élevée par ce point, perpendiculairement à son axe.

ADDITION AUX N°s. 160 ET 161.

La quantité p, introduite dans le premier de ces articles, demeurant indéterminée, peut pour simplifier la construction, recevoir telle valeur qu'on voudra lui assigner, excepté zéro.

Dans le n°. 161, on peut prendre $p = a$; et par ce moyen les équations des deux paraboles à construire, deviendront $x^2 = ay$, $y'^2 = 2ax$; la seconde aura un paramètre double de celui de la première.

FIN.

608481

AVIS.

Nous Propriétaire du présent Ouvrage, nous déclarons que nous regarderons comme contrefait, tout exemplaire qui ne porterait pas la présente déclaration, et la signature ou la paraphe du Propriétaire, ainsi qu'il suit; et que nous solliciterons en justice, l'application de la loi, contre quiconque en serait le détempteur, de même que contre tous contrefacteurs ou débitans d'exemplaires contrefaits.

Fautes essentielles à corriger.

Page 10, ligne 18, *sous le radical*, cos a'^2, *lisez* cos a'.
11, ligne 18, l'extrémité, *lisez* l'autre extrémité.
lig. 23, *sous le radical*, $\overline{AP}^2$, *lis.* $\overline{A'P}^2$.
14, lig. 17, $\frac{1}{2}\pi$, *lis.* $\frac{1}{4}\pi$
28, lig. 16, MR, *lis.* $M'R$.
30, lig. 1, figures, *lis.* formules.
37 et 102, dans les notes, où j'ai cité la *corrélation des figures de Géométrie* de Carnot, il faut substituer la *Géométrie de position* du même auteur; c'est le titre qu'il a donné à la seconde édition de cet Ouvrage, considérablement augmentée, et publiée depuis l'impression des notes citées.
77, lig. 28, *au commencement*, *effacez* les données.
Ibid., AB, *lis.* AC.
78, lig. 23, HB, *lis.* HC; lig. 24, AB, *lis.* AC; lig. 25, CK, *lis.* BK.
98, 99 et 100, *changez le signe des valeurs* de z', z'', z''' et z''''.
100, lig. 21, *effacez* l'axe des abscisses.
102, lig. 18, *après* mettre, *ajoutez* en équation.
110, *dans la grande accolade*, lig. 3, au lieu de $B'AC$, *lis.* $B'AC'$.
122, lig. 27, α, *lis.* p; lig. 29, $2px$, *lis.* $2r\alpha$; lig. 30, 0, *lis.* r^2.
131, lig. 29, d'', *lis.* $d_{,,}$.
132, lig. 4, $ad''-a'd'$, *lis.* $ad_{,,}-a'd_{,}$; lig. 10, *sous le radical* $c^2c'^2$, *lis.* $4c^2c'^2$.
135, lig. 11, $-\alpha\beta''$, *lis.* $-\alpha''\beta$; e', *lis.* e''; lig. 14, $\alpha''\beta$, *lis.* $\alpha'\beta$.
150, lig. 14, n, *lis.* n^2.
162, lig. 8, $C'A'''B''$, *lis.* $C''A'''B''$.
163, lig. 3, $P''G$, *lis.* $P''H$.
173, lig. 5, $2\alpha'$, *lis.* $2\alpha\beta'$; lig. 9, $a'^2b'^2$, *lis.* ab'^2.
217, lig. 6, augmenter, *lis.* diminuer.

Livres qui se trouvent chez COURCIER, *Imprimeur-Libraire, Quai des Augustins : n°. 71.*

Collection des mémoires relatifs à l'histoire de France. 64 vol in-8°. Prix broché, 108 francs.

Dictionnaire critique de la langue française, par M. l'abbé Féraud, auteur du Dictionnaire grammatical. 3 vol. in-4°. Prix 24 fr.

Dictionnaire de Vosgien, nouvelle édition. Prix 7 fr. 50 c.

Dictionnaire élémentaire de botanique, par Bulliard, revu et entièrement refondu par Louis-Claude Richard, professeur de botanique. 1 vol. in-8°., orné de 20 planches gravées en taille douce par Sellier. Prix 7 fr.

Dictionnaire littéraire. 3 vol. 9 fr.

Dictionnaire latin-français, par Boudot, in-8°. Prix 7 fr.

Idem français-latin, 6 fr.

Dictionnaire portatif allemand et français, contenant les mots techniques relatifs à l'art d'exploiter les mines, aux fonderies, aux boquards, aux laveries, aux différens procédés métalurgiques et docimastiques, où se trouvent les noms, tant en allemand qu'en français, des fourneaux, machines, outils et ustenciles à l'usage des travaux des mines, ainsi que ceux des veines ou filons ; des substances métalliques et minérales, etc. ; par le citoyen Duhamel, membre de l'institut national, et inspecteur des mines de la république française. An IX. 1 vol. in-8°. Prix 3 fr.

Elémens raisonnés de la langue russe, ou principes généraux de la Grammaire, appliqués à la langue russe, par l'auteur du nouveau système de lecture. 2 vol. in-8°. Prix 12 fr.

Dictionnaire de l'académie. 2 vol. in-4°. Prix 30 fr.

Dictionnaire de rime, par Richelet. 1 vol. relié. Prix 6 fr.

Dictionnaire raisonné de physique. 6 vol. in-8°. et atlas in-4°. Prix 36 fr.

Elémens de la Grammaire allemande, par P. A Basset Prix 2 fr.

Géographie de la France. 4 vol. in-12, avec carte. Prix 5 fr.

Grammaire française de Condillac 1 vol. in-12. Prix. 2 fr.

Grammaire anglaise-française, par Mege et Boyer. 1 vol. in-12. Prix 2 fr.

Grammaire de Wailly, in-12, 10e. édition. Prix 2 fr. 50 c.

Abrégé du même. 1 vol. in-12. Prix 90 c.

Grammaire italienne et française, vol. in-12. Prix 2 fr. 50 c.

Traité du style et des principes de lecture et de prononciation. 2 vol. in-8°. Prix 9 fr.

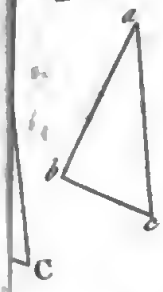
Grammaire philosophique, ou la métaphysique, la logique et la Grammaire, réunies en un seul corps de doctrine; par DIEUDONNÉ THIEBAULT, professeur aux écoles centrales, membre de l'académie royale de Berlin, et de la société libre des sciences, lettres, et arts de Paris; auteur du traité du style, et des principes de lecture et de prononciation. 2 vol. in-8°. Prix 7 fr. 50 c.

Traité du Style, publié par le même auteur. 2 vol. in-8°. Prix 9 fr. et 11 fr. 25 cent. franc de port.

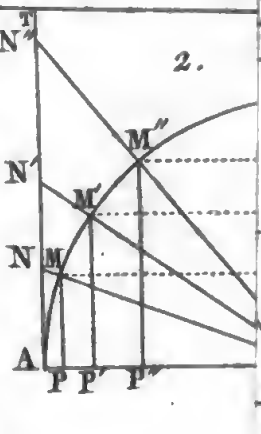
Il faut ajouter, pour recevoir ces ouvrages franc de port par la poste, 1 fr. 50 c. par vol. in-8°., et 75 c. par vol. in-12.

Nota. *On trouve aussi chez le même libraire, tous les ouvrages Mathématiques, tant anciens que modernes, qui composoient le fonds de librairie de* J. B. M. Duprat, *dont il est devenu propriétaire.*

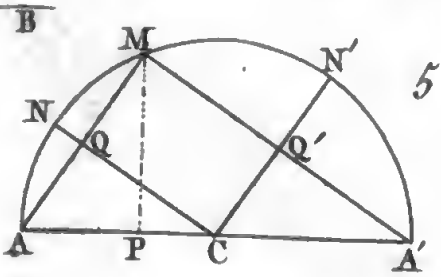
1.



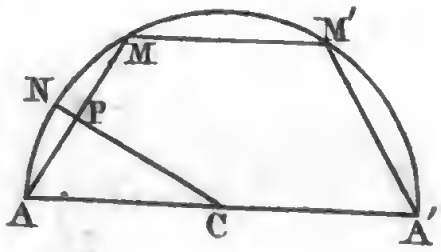
2.



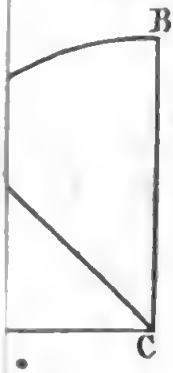
5

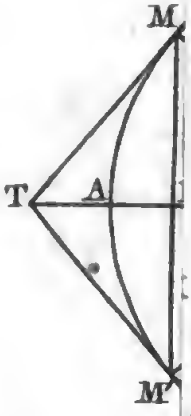


9.

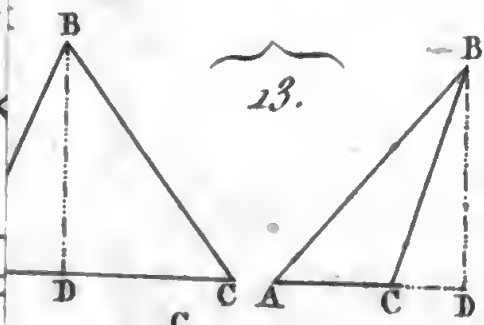


6.

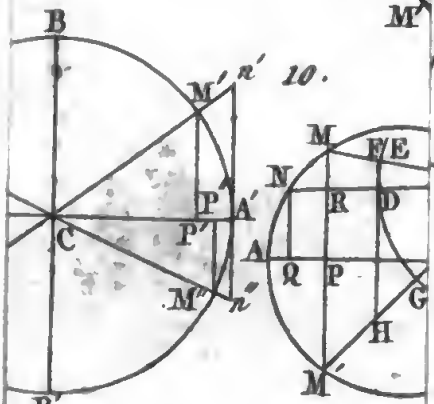




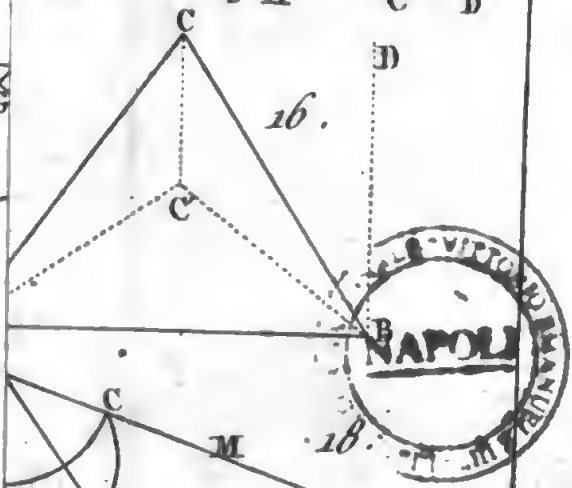
13.

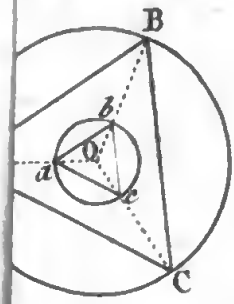


10.

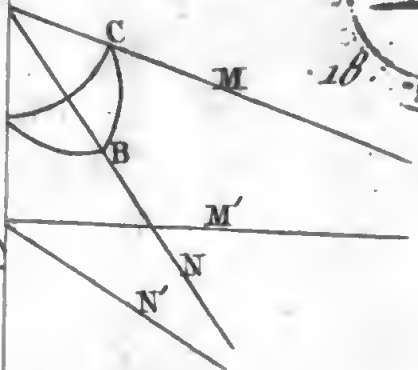


16.

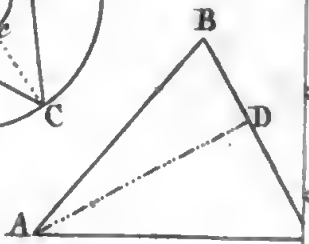




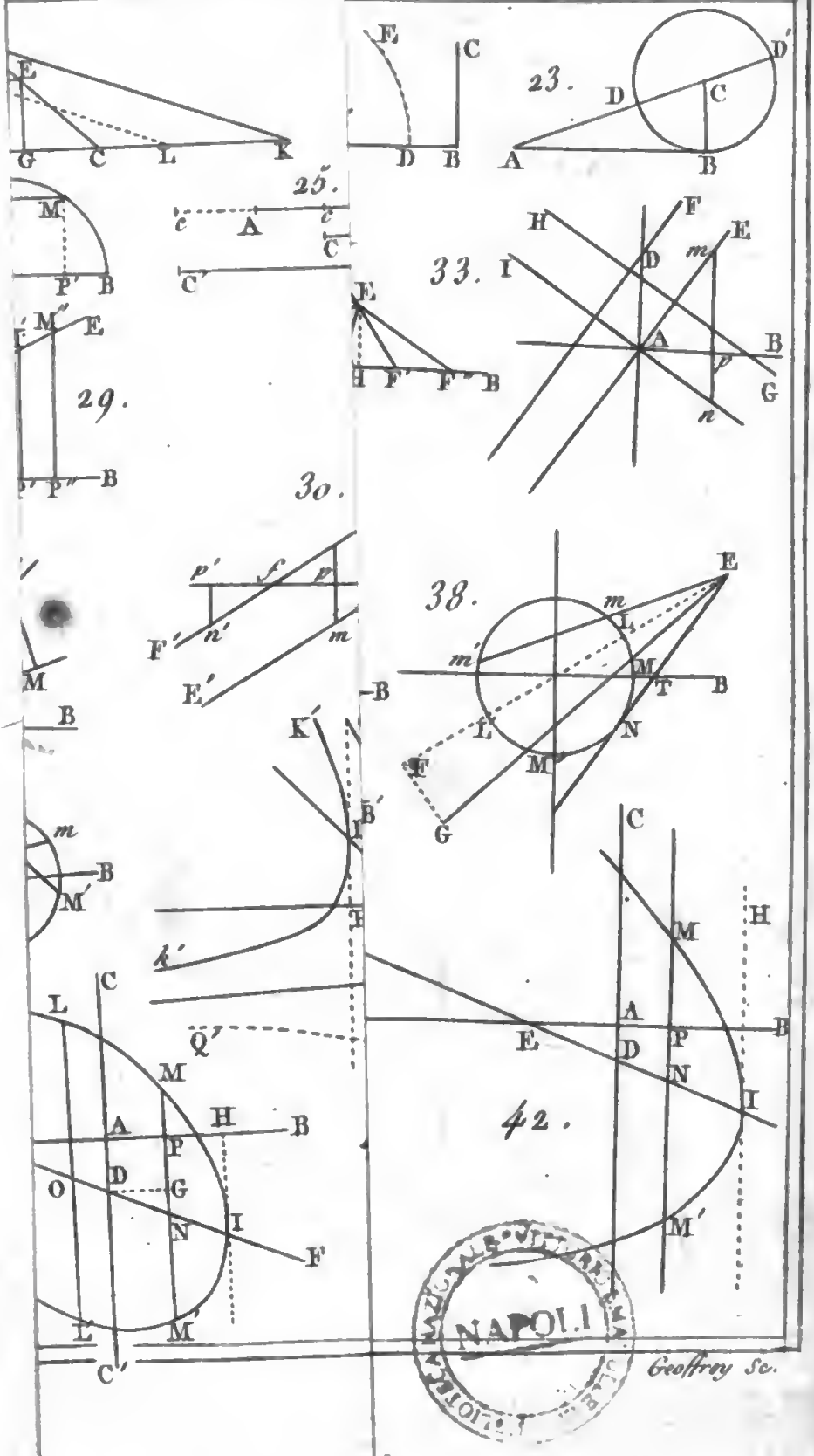
18.



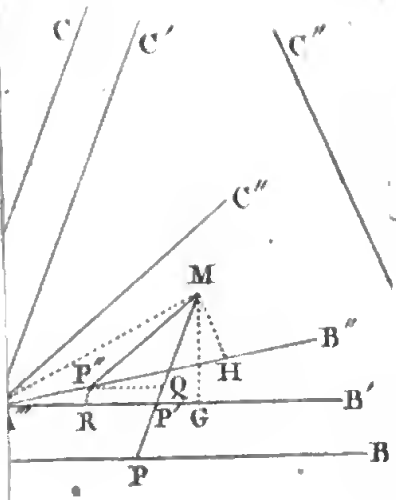
14.



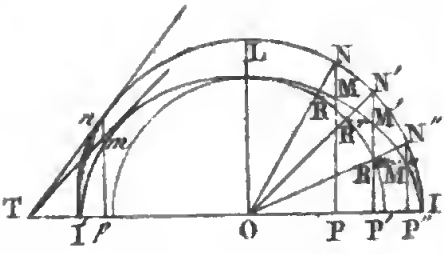
NAPOLI



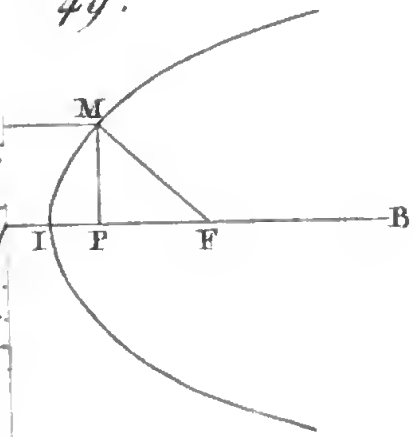
NAPOLI



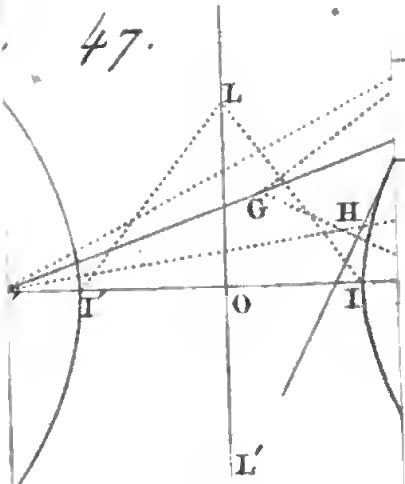
46.



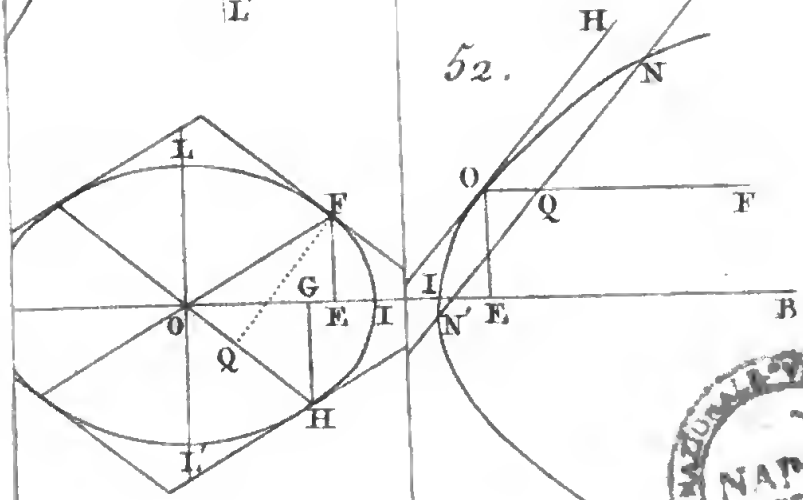
49.



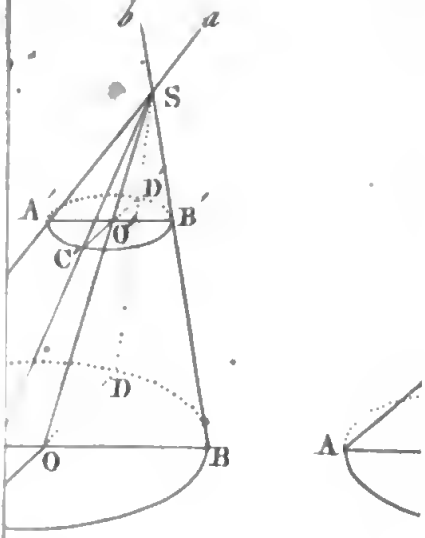
47.



52.

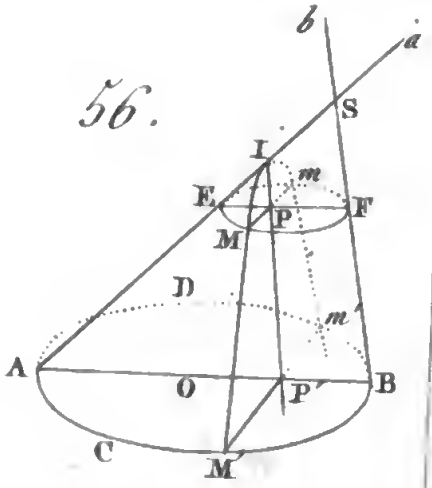


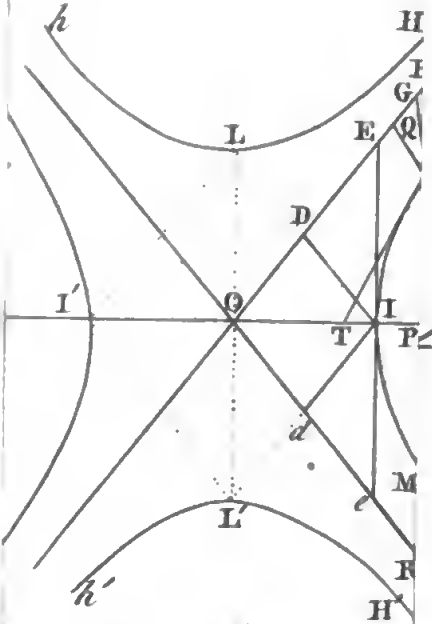
NAPOLI


b
a
S
A'
D'
B'
C'
O'
D
O
B

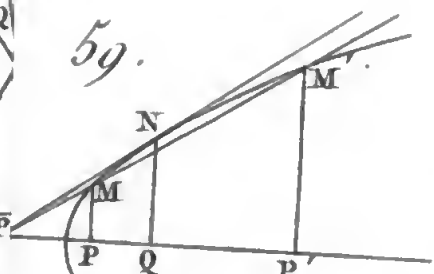
A

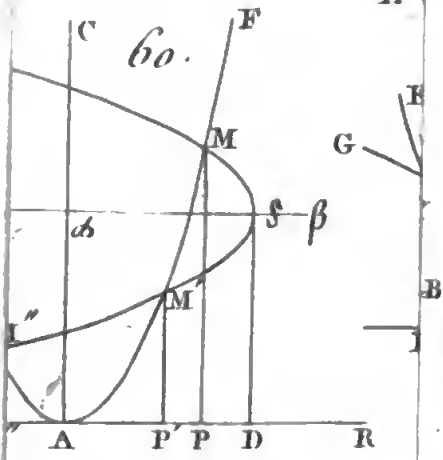
56.

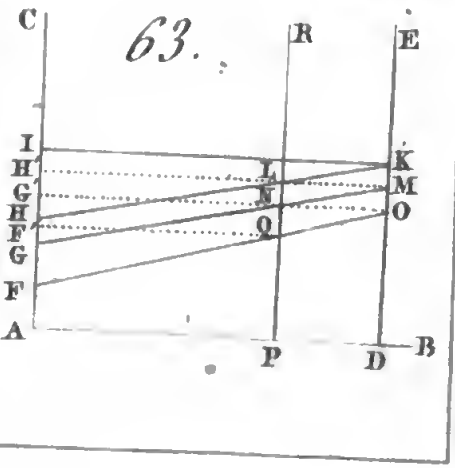

b
a
S
I
m
E
F
P
M
D
m'
A
O
P'
B
C
M'


h
H
I
G
L
E
Q
D
I'
O
I
T
P
d
M
L'
R
h'
H'

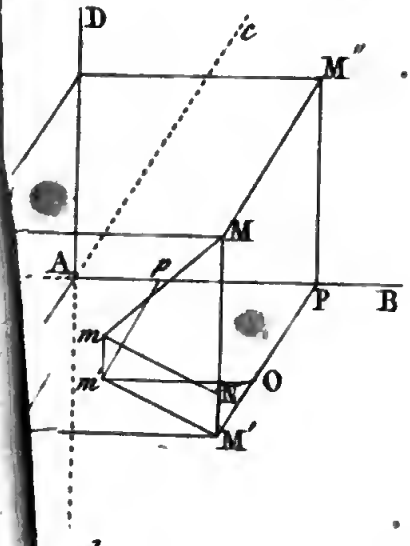
59.


M'
N
M
P
Q
P'


C
F
60.
M
G
B
α
β
M'
L''
A
P'
P
D
R


C
63.
R
E
I
H
G
H
F
G
F
A
L
N
Q
K
M
O
P
D
B

NAPOLI



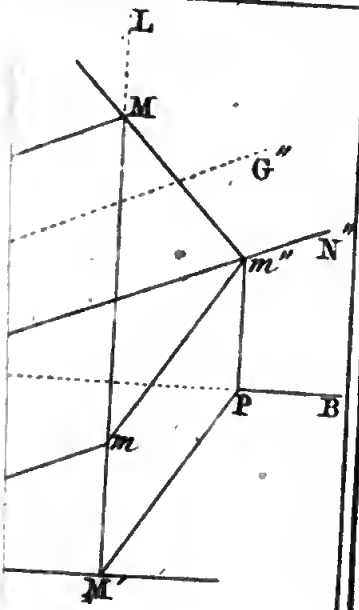
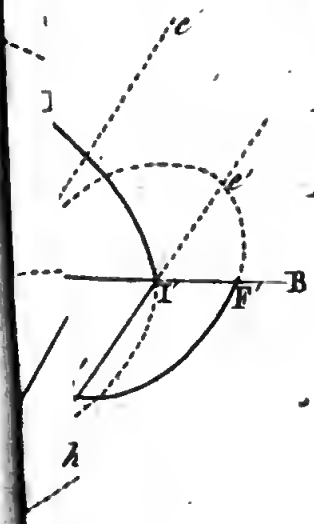
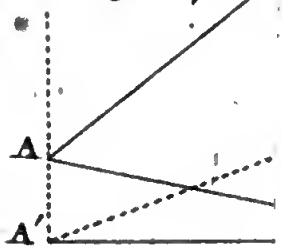
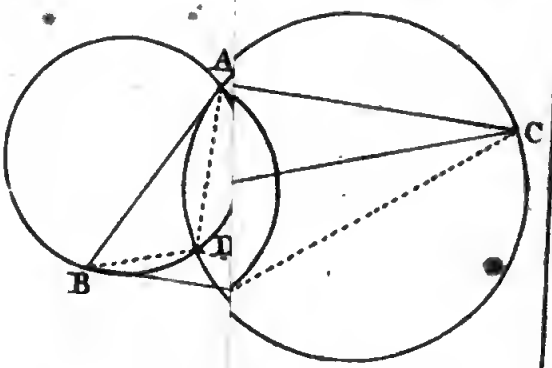
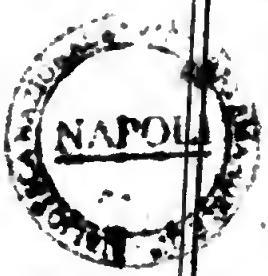


Fig. 67.









Geoffroy Sc.

Digitized by Google